Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Elektrotechnik
Grundlagen der Elektrotechnik
Univ.-Prof. Dr.-Ing. S. Dickmann

Grundlagen der Elektrotechnik
— das interaktive Skript —
Teil 2: Wechselspannung

von Dr.-Ing. Stefan Schenke

Dieses Skript finden Sie auf
www.stefan-schenke.de/get

Version vom 6. September 2022.

Mein Lehrmaterial stelle ich kostenlos im Internet zur Verfügung.

Wenn ich Ihnen damit helfen konnte, würde ich mich sehr über eine Postkarte für meine Pinwand freuen ☺

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Vorwort

Schon während meines Studiums in Kiel leitete ich im Rahmen eines Hiwi-Jobs Übungsgruppen im Fach „Grundlagen der Elektrotechnik“ (an dieser Stelle vielen Dank an Prof. Klinkenbusch). Wie es das Schicksal so will, fand ich danach eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Grundlagen der Elektrotechnik in Hamburg, wo ich erst promovierte und anschließend eine Anstellung als wissenschaftlicher Laborleiter fand. So kommt es, dass ich mittlerweile seit fast 20 Jahren mit vollem Eifer darum bemüht bin, Studienanfängern die Grundlagen so anschaulich wie möglich zu vermitteln.

Das vorliegende Skript ist eine Zusammenstellung meiner Erklärungsmethoden. Hierbei versuche ich in erster Linie anschaulich zu sein, damit Sie den Sinn & Zweck der einzelnen Themen verstehen. Ich erhebe keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit! Dieses Skript kann und soll kein Lehrbuch ersetzen, sondern Ihnen den Einstieg in ein Thema vereinfachen.

Zudem handelt es sich hier um die erste Version! Im Gegensatz zu einem Fachbuch haben weder ein Lektor oder ein fachlicher Experte die folgenden Seiten zur Kontrolle gelesen. Passen Sie also auf, Sie werden bestimmt Fehler entdecken. Bitte seien Sie dann so nett und schreiben Sie mir einen kurzen Hinweis an stefan.schenke@hsu-hh.de.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg in Ihrem Studium!

Interaktive Elemente

Youtube-Videos
Mit diesem Skript möchte ich Ihnen helfen, die Grundlagen der Elektrotechnik zu verstehen. Um Sie auf verschiedenen Wegen zu erreichen, erkläre ich viele Dinge auch auf Youtube. In den folgenden Kapiteln finden Sie QR-Codes, die auf Videos zum selben Thema verweisen. (Die Grafiken sind auch klickbar, wenn Sie dieses Skript in elektronischer Form lesen.)

Trainingsaufgaben
Die Grundlagen sind eigentlich ganz einfach. (Das ist z.B. Bruchrechnung aber auch!) Sie brauchen aber Übung, damit Sie das Gelernte anwenden können. Aus diesem Grund habe ich Aufgabenblätter mit Trainingsaufgaben erstellt. Diese Aufgaben sind auch ganz einfach und beziehen sich immer direkt auf das gerade behandelte Thema. Ich rate Ihnen dringend, alle Trainingsaufgaben zu lösen!

Übungsaufgaben
Diese Aufgaben bespreche ich auch in meinen „Übungen“, also in einer Lehrveranstaltungen mit meinen Studierenden. Diese Aufgaben sind also (im Gegensatz zu den Trainingsaufgaben) auf Uni-Niveau. Allerdings habe ich Beispiele gewählt, die anschaulich sind und keine, die als superschwer wahrgenommen werden. Sie können sich sowohl das Aufgabenblatt herunterladen als auch ein Lösungsvideo auf Youtube anschauen.

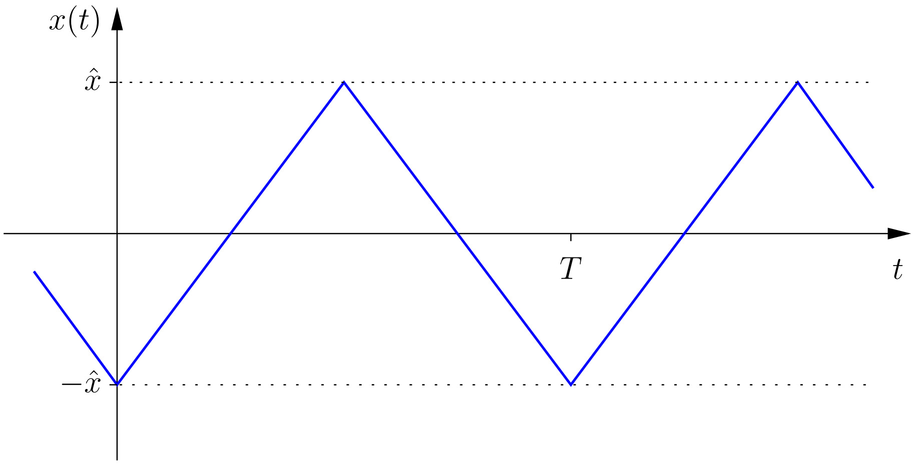
Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

4. Periodische Signale

4.1. Parameter von periodischen Signalen

Ein Signal heißt periodisch, wenn es sich nach der Periodendauer T exakt identisch wiederholt. Dieser Vorgang besitzt bei der idealisierten Betrachtungsweise keinen Anfang und kein Ende (das Signal war schon immer da und wird immer da sein).



Die folgenden Parameter werden zur Charakterisierung verwendet:

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &: \text{Amplitude} \\
T &: \text{Periodendauer} \\
f = \frac{1}{T} &: \text{Frequenz} \\
\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} &: \text{Kreisfrequenz}
\end{aligned}
$$

Im Folgenden werden weitere wichtige Kenngrößen von periodischen Signalen vorgestellt.

4.1.1. Mittelwert

Der Mittelwert ist der zeitlich durchschnittliche Wert einer Funktion. Wie man den Mittelwert berechnet, haben Sie wahrscheinlich bereits in der Grundschule gelernt, als es darum ging, die Durchschnittsnote einer Klassenarbeit zu berechnen. Sie haben dafür die Noten aller Arbeiten addiert und durch die Anzahl der Kinder geteilt:

$$\text{Durchschnittsnote} = \frac{\text{Note}_1 + \text{Note}_2 + ... + \text{Note}_n}{\text{Anzahl der Kinder}}.$$

Mittlerweile würden Sie eine kompaktere Schreibweise verwenden:

$$\text{Durchschnittsnote} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \text{Note}_i,$$

wobei N die Anzahl der Kinder ist.

Nun haben wir es mit Zeitsignalen $x(t)$ zu tun, die nicht aus abzählbaren Elementen bestehen. (Wir nennen sie kontinuierliche Signale, im Gegensatz zu den diskreten Signalen.) Den Mittelwert können wir aber auf die selbe Art berechnen, nur verwenden wir eine Integration statt der Summe:

Mittelwert eines periodischen Signals $x(t)$:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Um den Mittelwert einer periodischen Funktion zu berechnen, integrieren wir die Funktion über eine Periode (wobei es geal ist, an welcher Stelle t_0 wir beginnen) und teilen das Ergebnis durch die Periodendauer T.

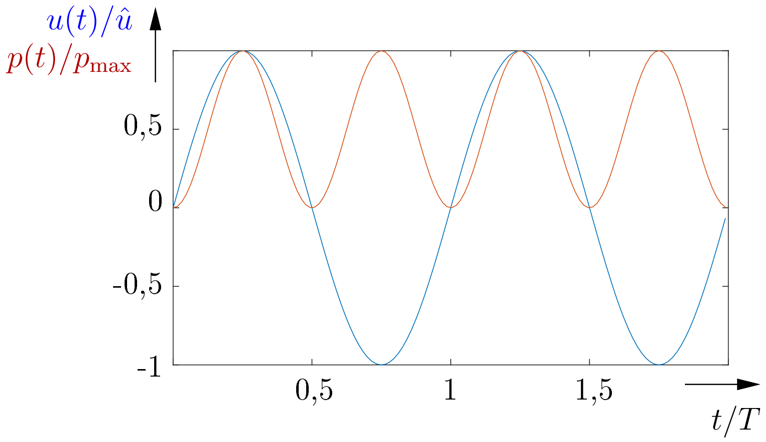
4.1.2. Effektivwert

Der Sinn der Effektivwertes soll anhand eines Beispiels veranschaulicht werden.

Ein Heizstrahler wird an einer sinusförmigen Spannung betrieben:
$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$.
Welche Heizleistung gibt das Gerät ab? (Wir gehen davon aus, dass sämtliche elektrische Energie in Wärme umgesetzt wird.)

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot \frac{u(t)}{R} = \frac{u^2(t)}{R}$$

(R ist der Widerstand der Heizwendel.) An unserem 50 Hz-Stromnetz wird die Heizwendel also 100 mal pro Sekunde ein- und ausgeschaltet, wie man am zeitlichen Verlauf von $p(t)$ erkennen kann:



Dies entspricht nicht unserer Alltagserfahrung. Ein Heizlüfter wird nicht schnell abwechselnd heiß und kalt. In der Tat ist das Material der Heizwendel thermisch zu träge, um sich so schnell zu erwärmen und abzukühlen. Es stellt sich die mittlere Leistung ein:

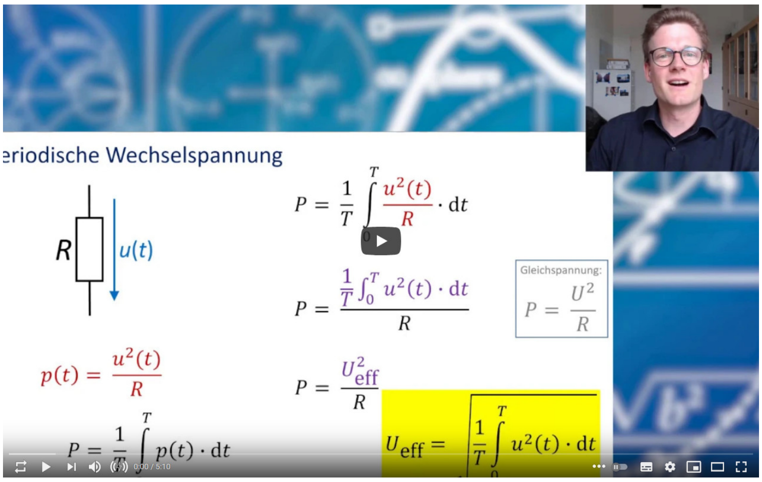
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} \cdot \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot \mathrm{d}t \\ &= \frac{U_{\mathrm{eff}}^2}{R} \end{aligned}$$

U_{eff}: Effektivwert

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot \mathrm{d}t}$$

Der Effektivwert einer periodischen Spannung (oder eines periodischen Stroms) entspricht dem Wert einer Gleichspannung (eines Gleichstroms), der in einer ohmschen Last die selbe Leistung umsetzt.

Effektivwert – Was ist das?



https://www.youtube.com/watch?v=BxGRvNFajZI

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

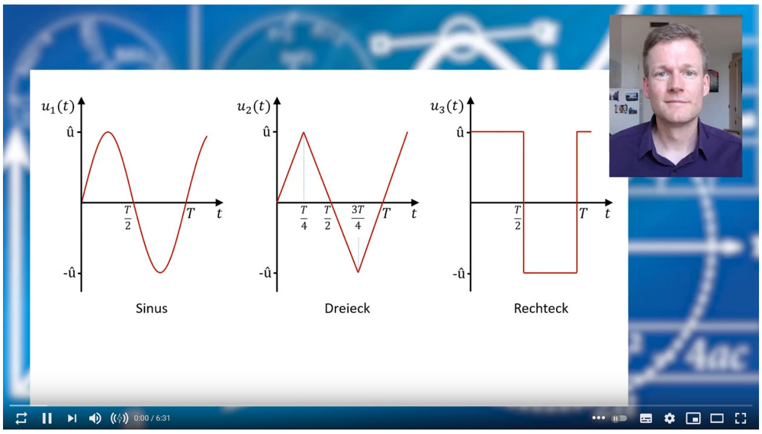
Beispiel: Effektivwert einer sinusförmigen Spannung

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \hat{u}\sin(\omega t) \\
\rightarrow U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T (\hat{u}\sin(\omega t))^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))}_{\sin^2(\omega t)} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\hat{u}^2}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T \qquad \left\langle \omega = \frac{2\pi}{T} \right\rangle \\
&= \frac{\hat{u}^2}{2T}\left(T \underbrace{- \frac{T}{4\pi}\cdot \underbrace{\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right)}_{0} - 0 + \frac{T}{4\pi}\underbrace{\sin(0)}_{0}}_{0} \right) \\
&= \frac{\hat{u}^2}{2}
\end{aligned}
$$

Effektivwert einer sinusförmigen Spannung mit der Amplitude $\hat{u}$:

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

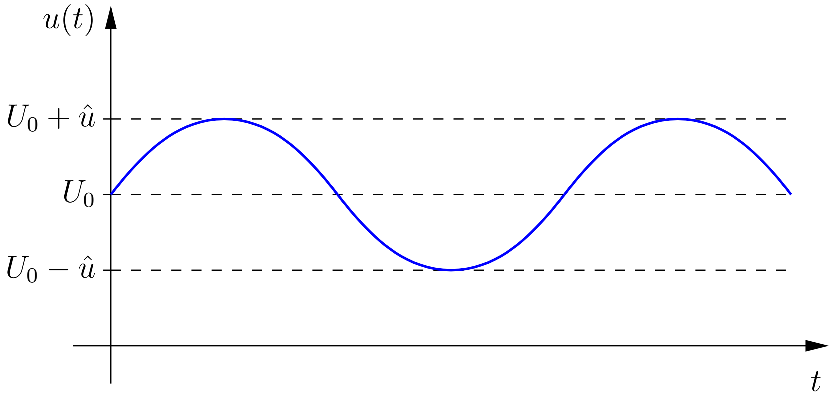
Effektivwerte von Sinus, Dreieck und Rechteck



https://www.youtube.com/watch?v=TLanCggZAMI

4.1.3. Effektivwert eines Signals mit Gleichanteil

Wir möchten den Effektivwert der Spannung $u(t) = U_0 + \hat{u}\sin(\omega t)$ berechnen.



$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(U_0 + \hat{u}\sin(\omega t)\right)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T U_0^2 \,\mathrm{d}t}_{U_0^2} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T 2U_0\hat{u}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t}_{0} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\hat{u}\sin(\omega t)\right)^2 \,\mathrm{d}t}_{\hat{u}^2/2} \\
\Rightarrow U_{\text{eff}} &= \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\right)^2}
\end{aligned}$$

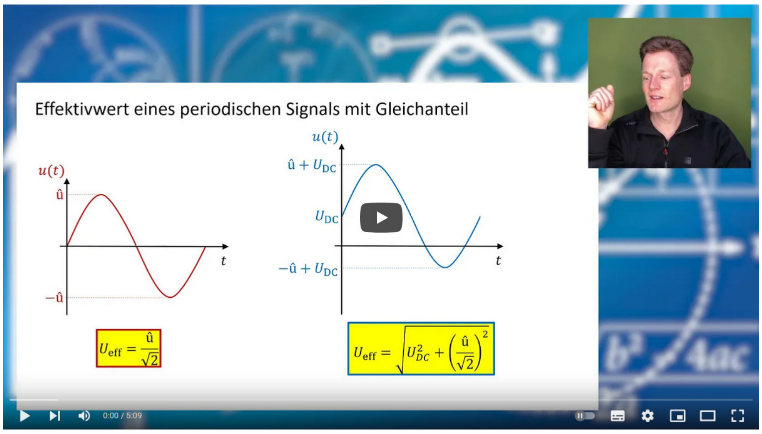
Es fällt auf, dass es sich bei U_0^2 um das Quadrat des Gleichanteils handelt und bei $(\hat{u}/\sqrt{2})^2$ um das Quadrat des Effektivwerts einer mittelwertfreien Sinusspannung mit der Amplitude $\hat{u}$.

Man kann jede periodische Funktion in einen Gleich- und einen Wechselanteil zerlegen:

$$\begin{aligned}
u(t) &= U_0 + \hat{u}\sin(\omega t) \\
&= \underbrace{U_0}_{\text{Gleichanteil}} + \underbrace{u_\sim(t)}_{\text{Wechselanteil}} \\
U_{\text{eff}\sim} &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

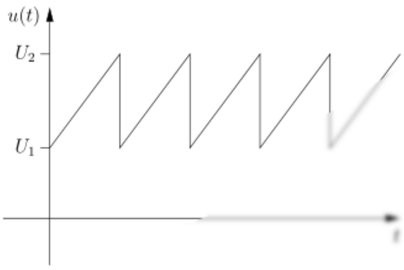
> Der Effektivwert eines Wechselsignals mit überlagertem Gleichanteil U_0 kann folgendermaßen berechnet werden:
>
> $$U_{\text{eff}} = \sqrt{U_0^2 + U_{\text{eff}\sim}^2}$$
>
> $U_{\text{eff}\sim}$ ist der Effektivwert des Wechselanteils.

Effektivwert einer periodischen Wechelgröße mit Gleichanteil



https://youtu.be/XBQymWTZpC4

Trainingsaufgaben: Effektivwerte ohne Integrale berechnen


An einem ohmschen Widerstand R liegt eine Zägezahnspannung, die von einer Gleichspannung überlagert ist:

1. Bestimmen Sie den
2. Berechnen
3.

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Effektivwerte_ohne_Integrale_berechnen.pdf

4.1.4. Gleichrichtwert

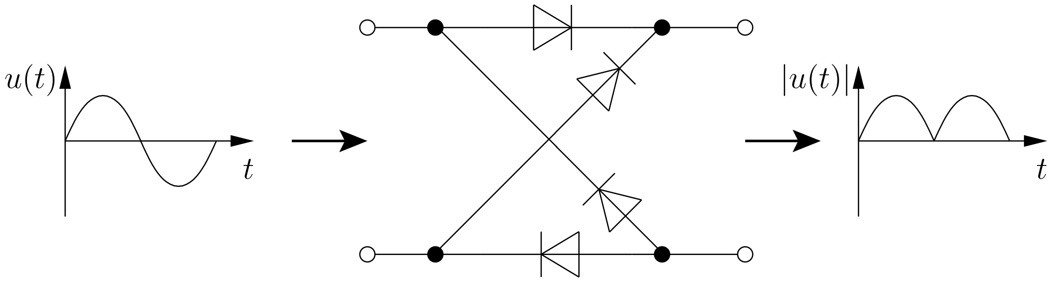
Auch der Gleichrichtwert soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

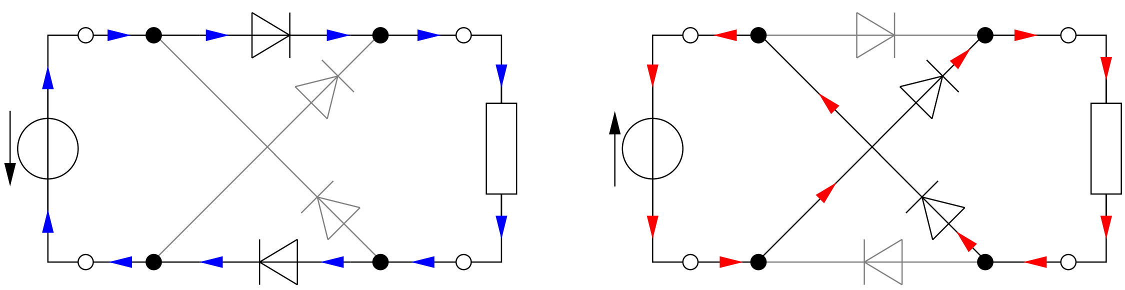
Frage: Welchen Wert zeigt ein Drehspulmessgerät (ein klassisches Zeigermessgerät) an?

- Der Zeiger bewegt sich proportional zum anliegenden Signal (Spannung oder Strom).
  → Das funktioniert hervorragend für Gleichspannungen und Gleichströme.

- Bei Wechselsignalen versucht der Zeiger dem Signalverlauf zu folgen, ist aber mechanisch zu träge und verharrt auf dessen Mittelwert. (Messen Sie also die Spannung an einer Steckdose mit einem **Gleichspannungs**messgerät, so zeigt es Null an!)

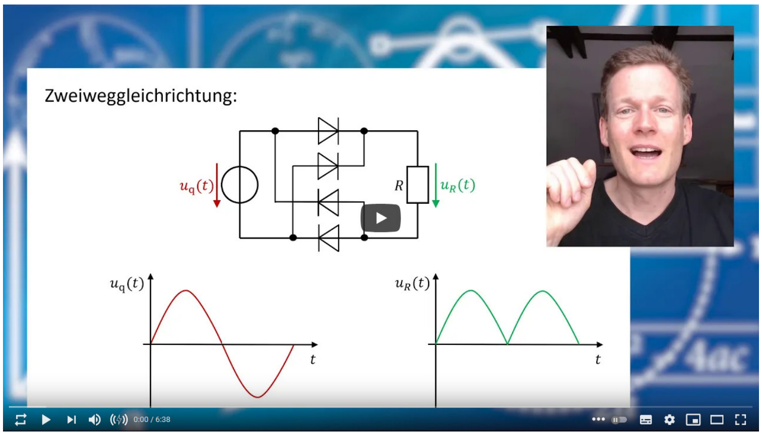
- Lösung des Problems: Im Wechselspannungs- (oder Wechslstrom-) Messbereich wird das Signal zunächst gleichgerichtet. Dies geschieht mit einer Gleichrichterschaltung. Unabhängig von der Polatität der Eingangsspannung ist die Ausgangsspannung dieser Schaltung immer positiv:





Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Einweg- und Zweiweggleichrichter



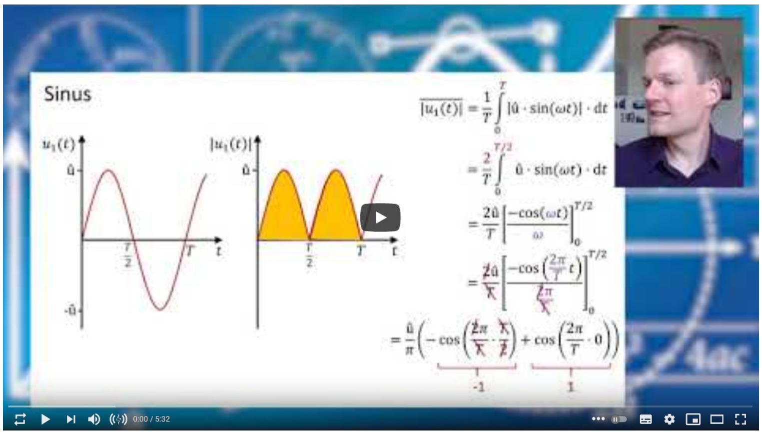
https://www.youtube.com/watch?v=NpEb-DUJafY

- Der Zeiger versucht nun, dem Verlauf des gleichgerichteten Signals zu folgen. Doch noch immer ist er hierfür zu träge und zeigt dessen Mittelwert an, der Gleichrichtwert heißt.

Gleichrichtwerts eines Signals $x(t)$:

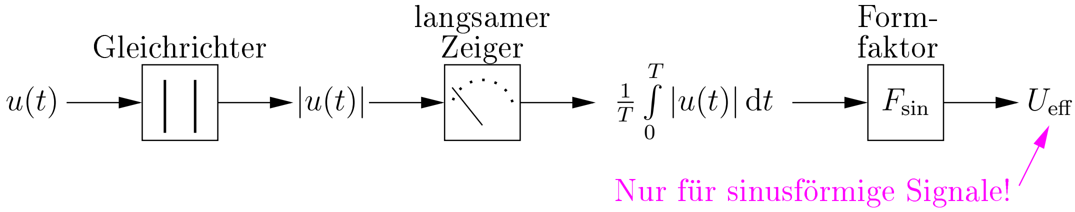
$$\overline{|x(t)|} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| \, \mathrm{d}t$$

Gleichrichtwerte von Sinus, Dreieck und Rechteck



https://www.youtube.com/watch?v=FVx0F3fhBWE

- Der Zeiger schlägt also proportional zum Gleichrichtwert aus. Wir sind jedoch interessiert an dem Effektivwert!
- Aus diesem Grund ist die Skala hinter dem Zeiger so dimensioniert, dass wir den Effektivwert ablesen können, **wenn wir eine sinusförmige Größe messen**.



- Dies wird erreicht, indem der Gleichrichtwert mit dem *Formfaktor* F_{sin} für sinusförmige Signale multipliziert wird.

Der Formfaktor

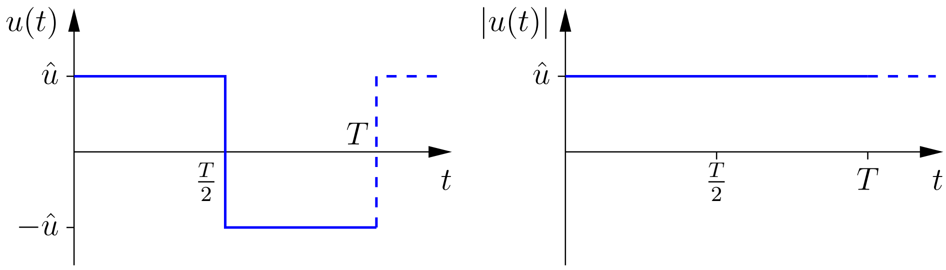
$$F = \frac{U_{\text{eff}}}{\overline{|u(t)|}} \quad \text{oder} \quad F = \frac{I_{\text{eff}}}{\overline{|i(t)|}}$$

$$\begin{aligned}
u(t) &= \hat{u}\sin(\omega t) \\
\overline{|u(t)|} &= \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{u}\sin(\omega t)|\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \hat{u}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\hat{u}}{T}\left[\frac{1}{\omega}(-\cos(\omega t))\right]_0^{T/2} \qquad \left\langle \omega = \frac{2\pi}{T} \right\rangle \\
&= \frac{2\hat{u}}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\underbrace{\left(-\cos\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)}_{=\pi} + \cos(0)\right)}_{=2} \\
&= \frac{2\hat{u}}{\pi} \\
\Rightarrow F_{\text{sin}} &= \frac{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}{\frac{2\hat{u}}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11
\end{aligned}$$

Welche Werte zeigt ein Drehspulmessgerät bei Rechteck- und Dereiecksignalen?

Rechtecksignale

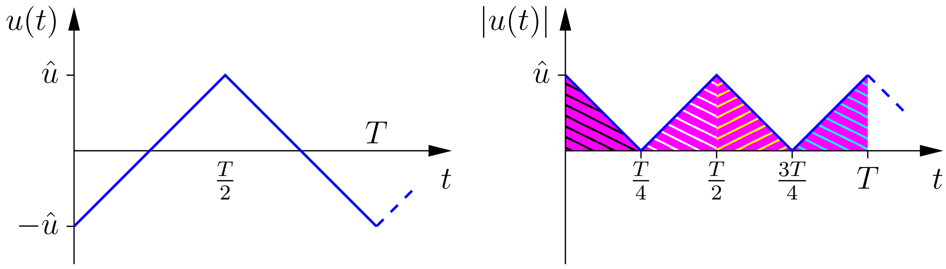
$$u(t) = \begin{cases} \hat{u} & , \quad 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\hat{u} & , \quad \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$



$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \, \mathrm{d}t = \hat{u}$$

$\rightarrow$ Das Drehspulmessgerät zeigt $1,11 \cdot \hat{u}$.

Dreiecksignale



$$\begin{aligned} \overline{|u(t)|} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \left(-\frac{\hat{u}}{T/4} t + \hat{u} \right) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{T} \left[-\frac{4\hat{u}}{T} \cdot \frac{1}{2} t^2 + \hat{u} t \right]_0^{T/4} \\ &= \frac{4}{T} \left(-\frac{4\hat{u}}{T} \cdot \frac{1}{2} \frac{T^2}{16} + \hat{u} \frac{T}{4} \right) \\ &= \frac{\hat{u}}{2} \end{aligned}$$

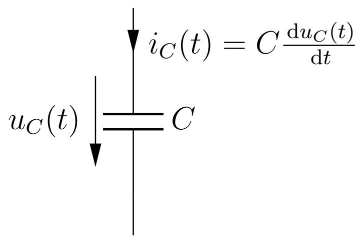
$\rightarrow$ Das Drehspulmessgerät zeigt $\frac{1{,}11}{2} \cdot \hat{u}$.

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

5. Wechselstromschaltungen

5.1. Sinusförmige Ströme und Spannungen an Kondensatoren und Spulen

In Kapitel 3 (siehe Teil 1 dieses Skripts) haben wir gelernt, dass am Kondensator der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung wie folgt definiert ist:



Wir gehen nun davon aus, dass die Spannung bekannt ist:

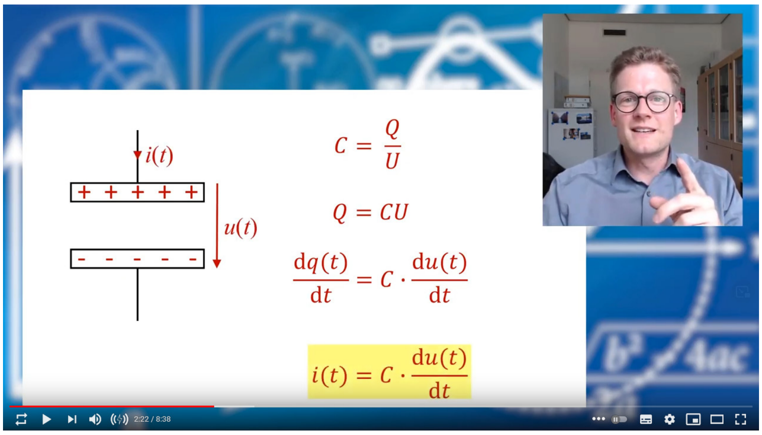
$$u_C(t) = \hat{u}\sin(\omega t).$$

Laut der Bauelementgleichung gilt für den Strom

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C\frac{\mathrm{d}\big(\hat{u}\sin(\omega t)\big)}{\mathrm{d}t} \\ &= C\hat{u}\omega\cos(\omega t) \\ &= \hat{u}\omega C\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

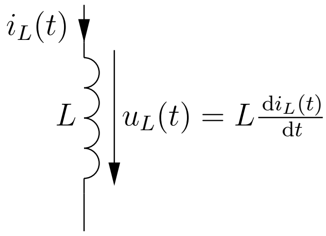
Es fließt ein ebenfalls sinusförmiger Strom, der jedoch eine Phasenverschiebung zur Spannung aufweist. Bei einem (idealen) Kondensator eilt der Strom der Spannung um 90° voraus.

Strom und Spannung am Kondensator



https://www.youtube.com/watch?v=lKDN311Rjb0

Ähnlich verhält es sich bei einer Spule, deren Bauelementgleichung wir ebenfalls in Kapitel 3 kennengelernt haben:



Nun sei der Strom gegeben:

$$i_L(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t)$$

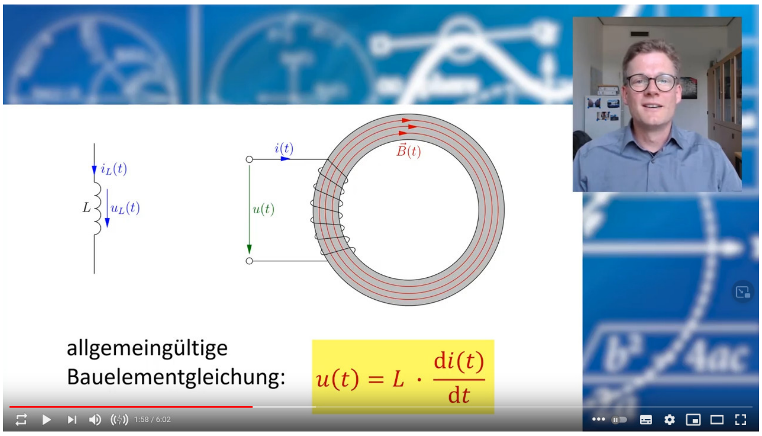
Laut der Bauelementgleichung gilt für die Spannung

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L\frac{\mathrm{d}\big(\hat{\imath}\sin(\omega t)\big)}{\mathrm{d}t} \\ &= L\hat{\imath}\omega\cos(\omega t) \\ &= \hat{\imath}\omega L\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Es stellt sich eine sinusförmige Spannung ein, die dem Strom um 90° voraus eilt.

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

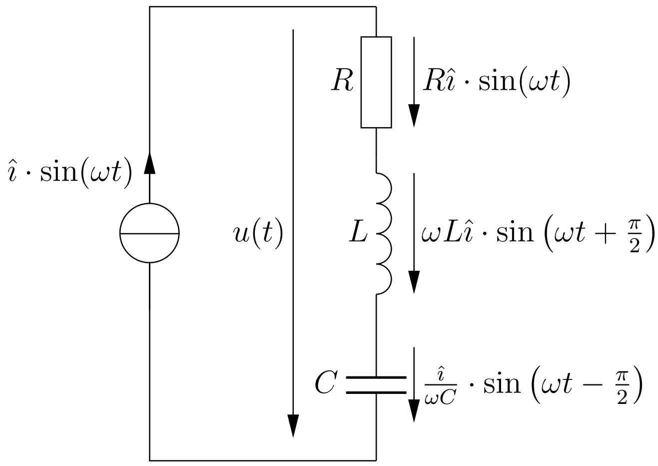
Strom und Spannung an der Spule



https://www.youtube.com/watch?v=wbCAlXB3Cbk

5.2. Spannungen im Wechselstromkreis

In der folgenden Schaltung treibt eine ideale Stromquelle einen sinusförmigen Strom durch die Reihenschaltung aus R, L, und C. Dieser Strom verursacht die drei eingezeichneten Spannungsabfälle an den Bauteilen:

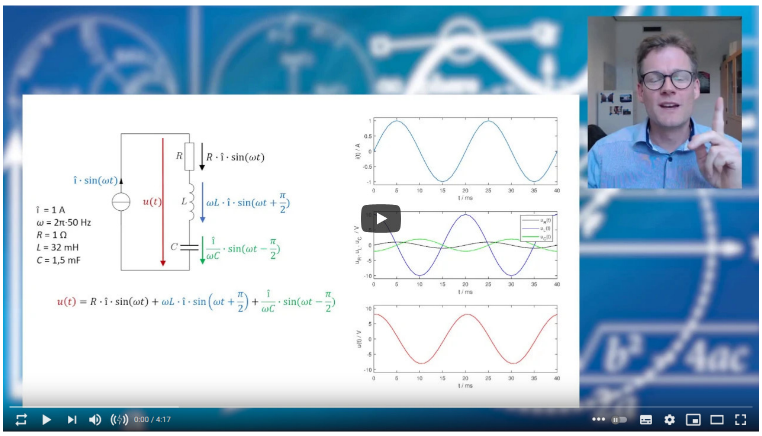


Für die Gesamtspannung $u(t)$ gilt also

$$u(t) = R \cdot \hat{\imath} \sin(\omega t) + \omega L \hat{\imath} \sin(\omega t + 90^\circ) + \frac{\hat{\imath}}{\omega C} \sin\left(\omega t - 90^\circ\right).$$

→ Gemäß der vorangegangenen Überlegungen sind die Spannungen an allen Bauelementen ebenfalls sinusförmig, unterscheiden sich jedoch in ihrer Phasenlage.

Wechselstrom Teil 1: Rechnen im Zeitbereich



https://www.youtube.com/watch?v=PoQxSPl0qZU

Es wäre sehr mühsam, Wechselstromkreise wie im Beispiel oben zur berechnen. Das Auswerten des Ausdrucks für $u(t)$ benötigt die Anwendung von Additionstheoremen

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

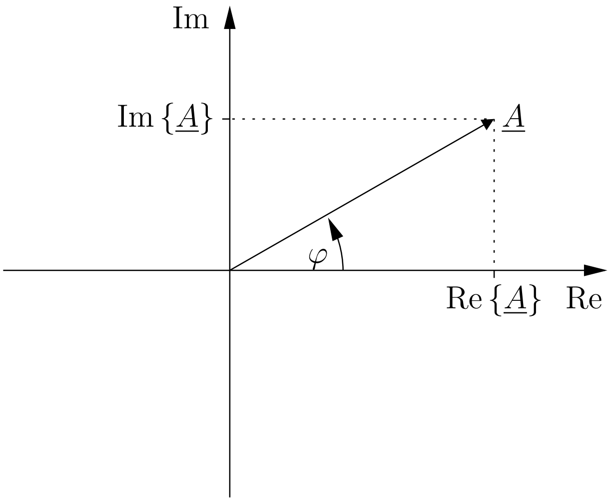
und ist relativ zeitaufwendig.

Da wir jedoch wissen, dass es sich bei allen Spannungen und Strömen innerhalb eines linearen Wechselstromkreises um sinusförmige Ströme und Spannungen handelt, die sich nur in ihren Beträgen und ihren Nullphasenwinkeln voneinander unterscheiden, können wir uns der komplexen Zahlen bedienen:
Eine komplexe Zahl besteht *von Natur aus* aus einem Betrag und einem Phasenwinkel. Dank der mathematischen Rechenregeln lassten sich mit komplexen Zahlen Wechselstromschaltungen ganz genauso berechnen, wie Gleichstromschaltungen!

Im folgenden Abschnitt werden die grundlegenden Rechenregeln wiederholt.

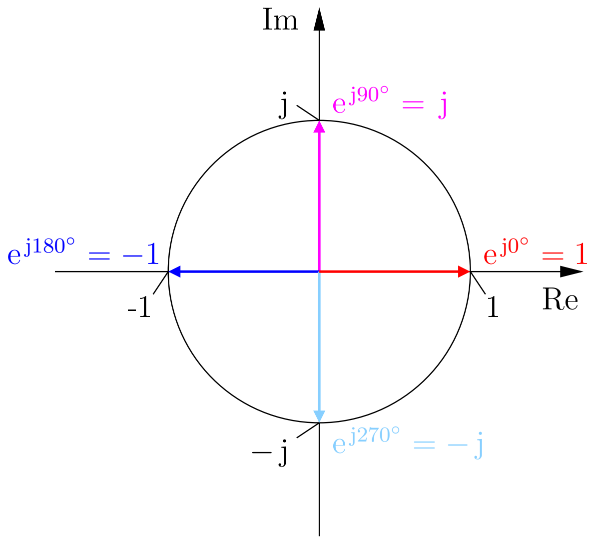
5.3. Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl besteht aus einem Real- und einem Imaginärteil. Sie lässt sich jedoch auch durch ihren Betrag (also dem Abstand zum Ursprung der Zahlenebene) und ihren Phasenwinkel beschreiben. In diesem Skript werden komplexwertige Variablen durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Ist die Variable nicht unterstrichen, ist der Betrag gemeint:



$\underline{A} = \mathrm{Re}\{\underline{A}\} + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\{\underline{A}\} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$. Hierbei ist $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ die Eulersche Identität:

Eulersche Identität: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)$

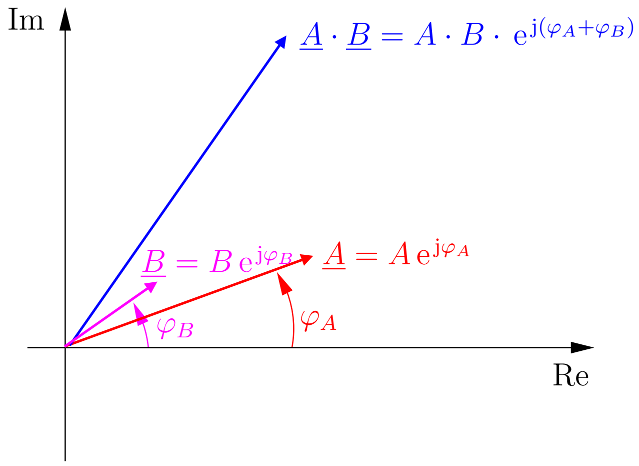


Die komplexe Zahl $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ hat immer den Betrag 1 und den Phasenwinkel φ.

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Multiplikation von komplexen Zahlen

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

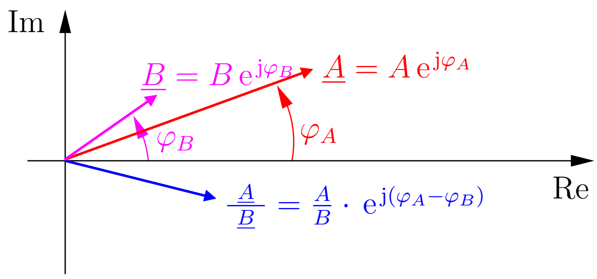


Hieraus folgt auch

$$\mathrm{j} \cdot \mathrm{j} = -1$$

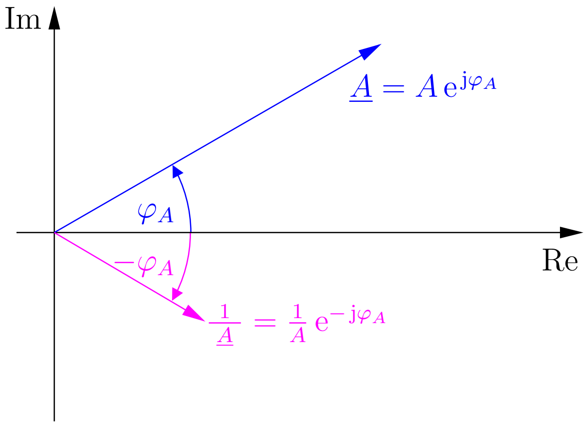
Division von komplexen Zahlen

Bei der Division zweier komplexer Zahlen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ werden die Beträge durcheinander geteilt und die Winkel voneinander abgezogen.



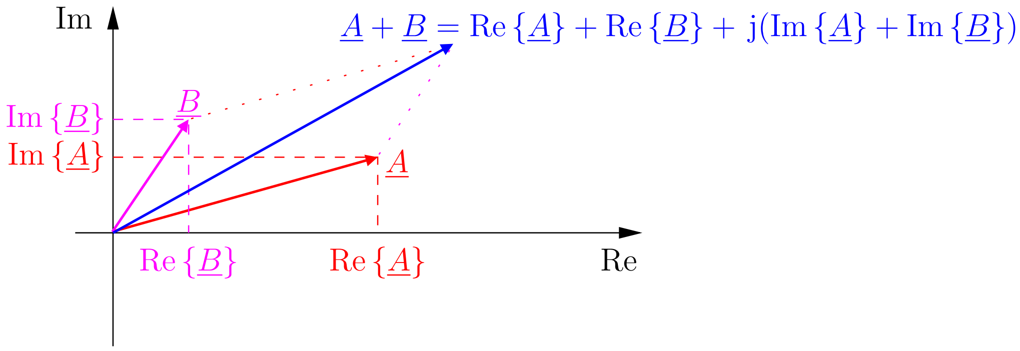
Kehrwert einer komplexen Zahl

Aus der Divisionsregel folgt, dass man den Kehrwert (oder die Inverse) einer komplexen Zahl erhält, indem man den Kehrwert des Betrags bildet und das Vorzeichen des Winkels invertiert.



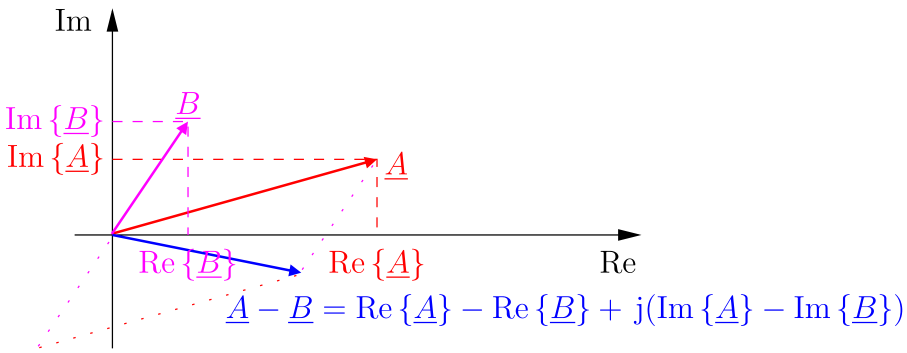
Addition von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ werden addiert, indem man jeweils die Realteile und die Imaginärteile miteinander addiert.



Substraktion von komplexen Zahlen

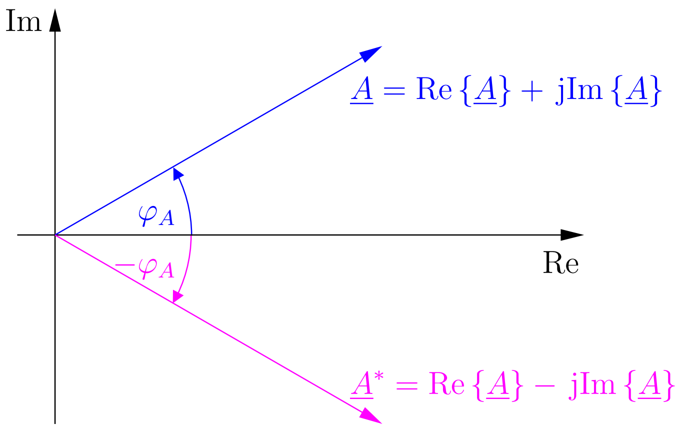
Zwei komplexe Zahlen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ werden subtrahiert, indem man jeweils die Realteile und die Imaginärteile voneinander abzieht.



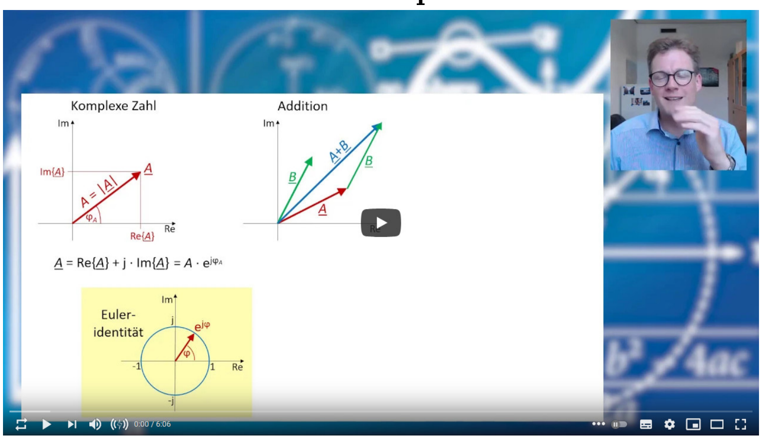
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Die konjugiert komplexe einer komplexen Zahl

Die konjugiert komplexe Zahl $\underline{A}^*$ besitzt den selben Betrag wie $\underline{A}$, jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen des Winkels. Die Summe von $\underline{A}$ und $\underline{A}^*$ ist stets rein reellwertig.



Wechselstrom Teil 2: Komplexe Zahlen



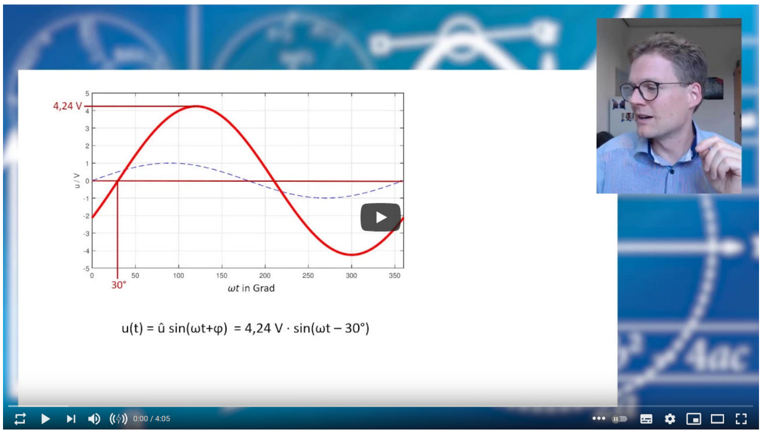
https://www.youtube.com/watch?v=EEW5twSmfKE

5.4. Der Phasor

Als Phasor bezeichnet man eine komplexe Zahl, die die Amplitude und den Nullphasenwinkel einer sinusförmigen Größe repräsentiert.

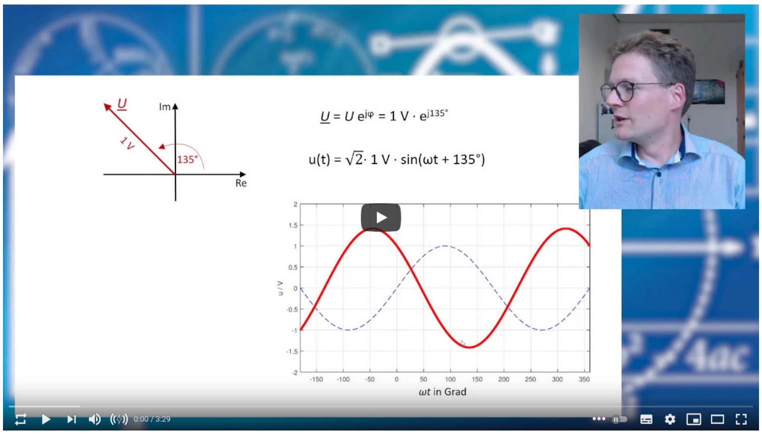
$$\begin{aligned}
\text{Eulers Identität}: \quad e^{\pm j\varphi} &= \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi) \\
\rightarrow \cos(\varphi) &= \mathrm{Re}\left\{e^{j\varphi}\right\} \\
\rightarrow \sin(\varphi) &= \mathrm{Im}\left\{e^{j\varphi}\right\} \\
\text{Mit} \quad u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi) &= \mathrm{Im}\left\{\hat{u}\, e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\underline{u}(t)\right\} \\
\underline{u}(t) &= \hat{u}\, e^{j(\omega t+\varphi)} = \hat{u}\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi} \\
\text{komplexe Amplitude}: \quad \underline{\hat{u}} &= \hat{u}\, e^{j\varphi} \\
\text{komplexer Effektivwert}: \quad \underline{U} &= \frac{\underline{\hat{u}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\, e^{j\varphi} = U\, e^{j\varphi}
\end{aligned}$$

Sinusförmige Spannung als komplexen Zeiger darstellen



https://www.youtube.com/watch?v=2-mLuZJnqbk

Vom komplexen Zeiger zur sinusförmigen Spannung

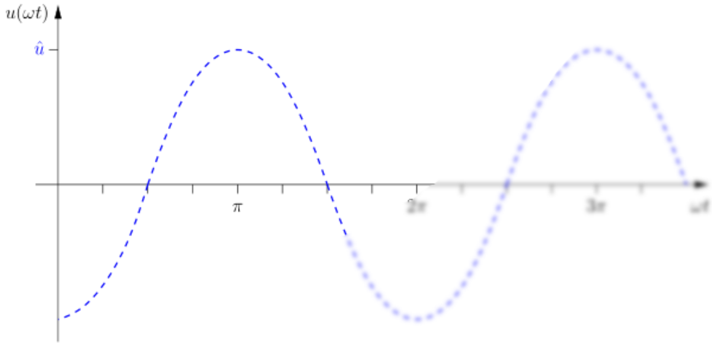


https://www.youtube.com/watch?v=7MA6iT_vuoE

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Trainingsaufgaben: Komplexe Darstellung von Sinusgrößen

Gegeben ist ein sinusförmiger Spannungsverlauf $u(\omega t)$ mit der Amplitude $\hat{u}$.



1. Drücken Sie $u(\omega t)$ als Zeitfunktion aus.
2. Bestimmen Sie den komplexen Effektivwert $\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$ von $u(\omega t)$. Bestimmen Sie hierfür U und φ_u.

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Komplexe_Darstellung_von_Sinusgroessen.pdf

5.4.1. Zeigerdiagramm

(Siehe Beispiel 5.2.)

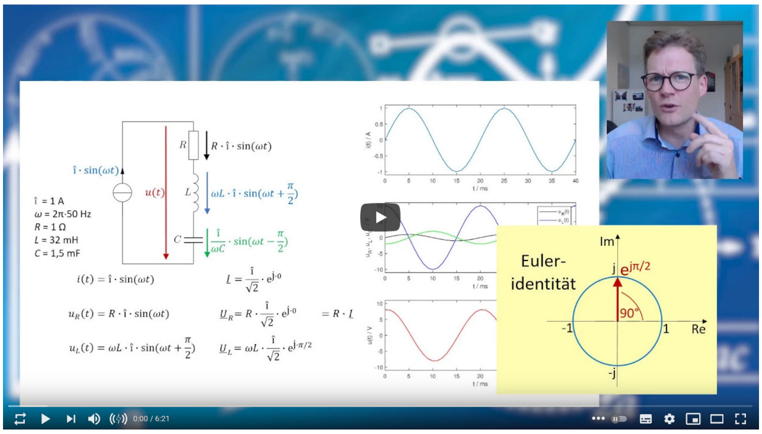
$$
\begin{aligned}
i(t) &= \hat{\imath}\sin(\omega t) \\
\rightarrow \underline{I} &= \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ} \left(= \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_R(t) &= R\cdot\hat{\imath}\sin(\omega t) \\
\rightarrow \underline{U}_R &= \frac{R\cdot\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ} \\
&= R\cdot\underline{I}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_L(t) &= \omega L\cdot\hat{\imath}\sin(\omega t + 90^\circ) \\
\rightarrow \underline{U}_L &= \omega L\cdot\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ} = \omega L\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}\,\underline{I} \\
&= \mathrm{j}\omega L\cdot\underline{I}
\end{aligned}
$$

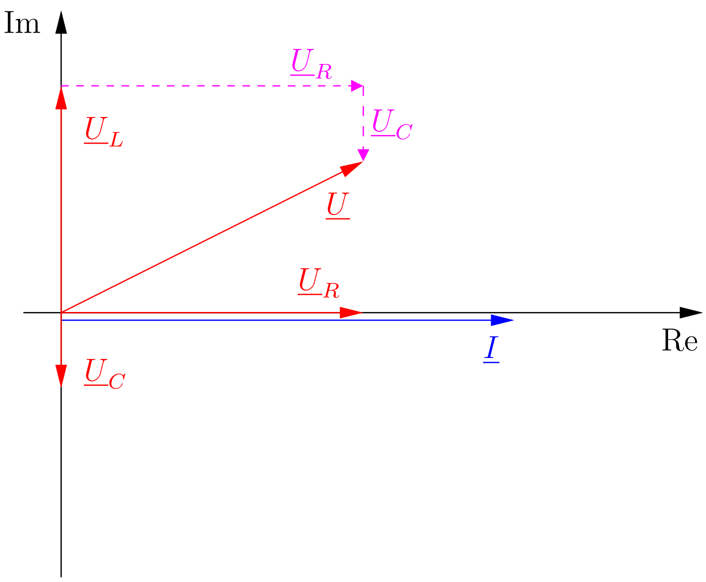
$$
\begin{aligned}
u_C(t) &= \frac{\hat{\imath}}{\omega C}\sin\left(\omega t - 90^\circ\right) \\
\rightarrow \underline{U}_C &= \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}\omega C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ} = \frac{1}{\omega C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}\cdot\underline{I} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\cdot\underline{I} \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\cdot\underline{I}
\end{aligned}
$$

Wechselstrom Teil 3: Nutzung komplexer Zahlen



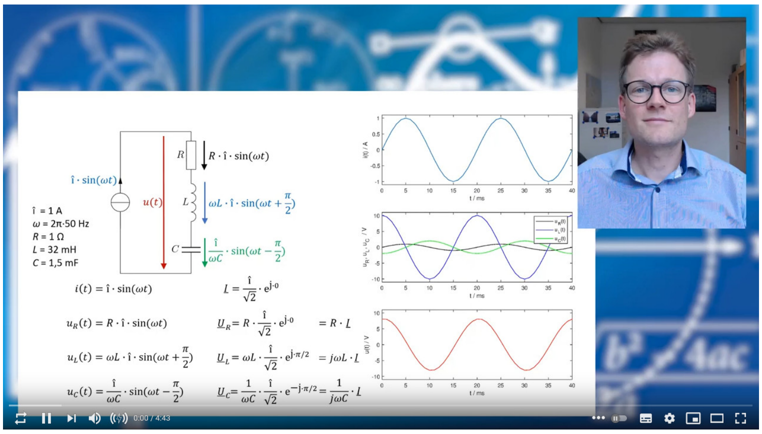
https://www.youtube.com/watch?v=asfQZ0iyoOA

Die berechneten Phasoren lassen sich nun in die komplexe Ebene eintragen. Man nennt dies „Zeigerdiagramm“. Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion der Gesamtspannung $\underline{U}$, die einfach die geometrische Addition der drei Phasoren von $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_C$ darstellt.



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Wechselstrom Teil 4: Zeigerdiagramme



https://www.youtube.com/watch?v=MnK6AzzE8SA

5.5. Impedanzen and Admittanzen

(Siehe vorheriges Beispiel.)

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= R \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_L &= \mathrm{j}\omega L \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_C &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \cdot \underline{I} \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\mathrm{j}\omega L$ wird „Impedanz einer Spule“ und $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ „Impedanz eines Kondensators“ genannt. Man könnte sie auch die *komplexen Widerstände* der Bauelemente nennen.

Die inversen Ausdrücke $\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$ und $\mathrm{j}\omega C$ nennt man Admittanzen. Man könnte sie auch die *komplexen Leitwerte* nennen.

Impedanzen und Admittanzen der drei passiven Grundelemente

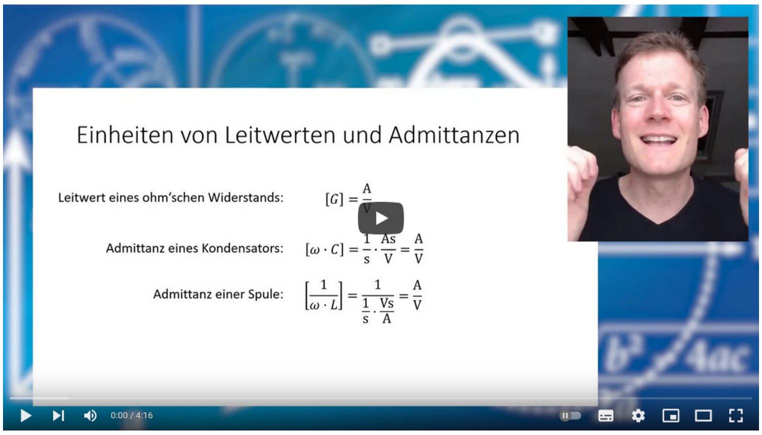
Impedanzen:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_R &= R \\ \underline{Z}_L &= \mathrm{j}\omega L \\ \underline{Z}_C &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \end{aligned}$$

Admittanzen:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_R &= \frac{1}{R} \\ \underline{Y}_L &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L} \\ \underline{Y}_C &= \mathrm{j}\omega C \end{aligned}$$

Einheiten von Admittanzen

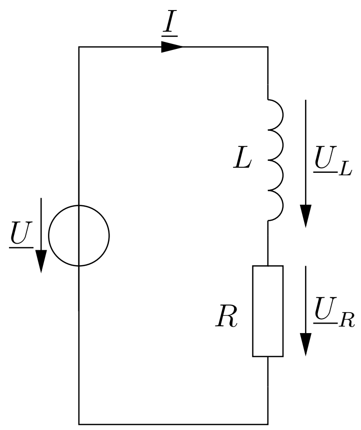


https://youtu.be/48DwhEHEL4E

Hinweis: Alle Regeln, die Sie für Gleichspannungsschaltungen kennengelernt haben (Spannungs- und Stromteiler, Kirchhoffsche Sätze, Quellenumformungen, Ersatzquellen, ...) gelten unverändert auch für Wechselstromschaltungen! ☺

Beispiel:

Eine Wechselspannungsquelle $\underline{U}$ mir der Kreisfrequenz ω treibt den Strom $\underline{I}$ durch eine L-R-Schaltung. Gesucht ist der Spannungsabfall $\underline{U}_R$.

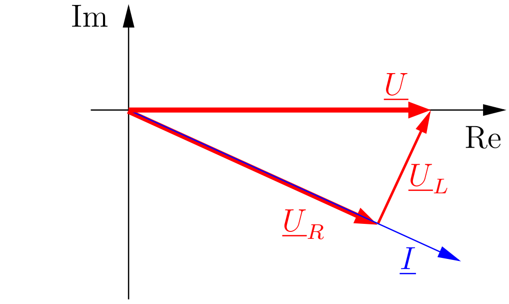


Wir nutzen die bekannte Formel des Spannungsteilers:

$$\underline{U}_R = \underline{U} \cdot \frac{R}{R + \mathrm{j}\omega L}. \quad \text{(Es ist tatsächlich so einfach!)}$$

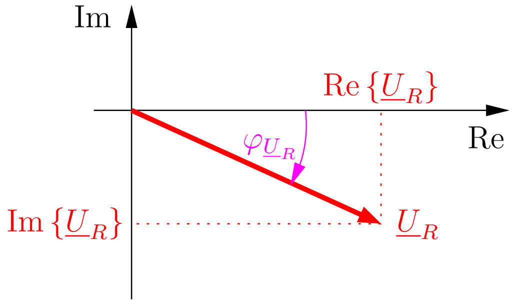
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Im Folgenden möchten wir $\underline{U}_R$ nach Betrag und Phase ausdrücken. Dafür stellen wir zunächst sämtliche Faktoren in dieser Form dar.



$$\underline{U}_R = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)}}$$

Hierbei ist U der Betrag der Spannung $\underline{U}$ und φ_U dessen Nullphasenwinkel.
Teilt man komplexe Zahlen durcheinander, dividiert man deren Beträge und subtrahiert die Winkel:



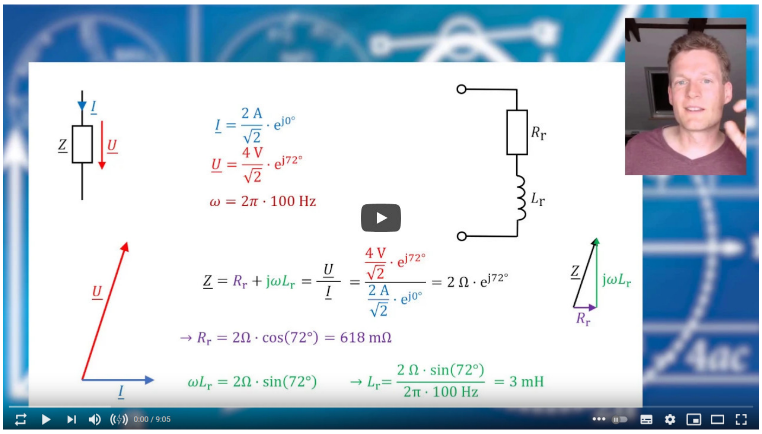
$$\underline{U}_R = \frac{U\cdot R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi_U - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}$$

$$U_R = \frac{U\cdot R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$\varphi_{\underline{U}_R} = \varphi_U - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

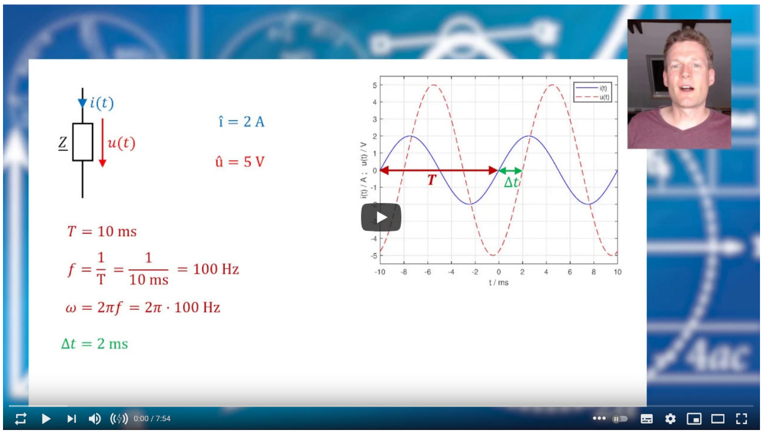
Bei den rechts abgebildeten Zeigerdiagrammen wurde der Nullphasenwinkel von $\underline{U}$ zu Null gesetzt.

ohmsch-induktive Impedanz



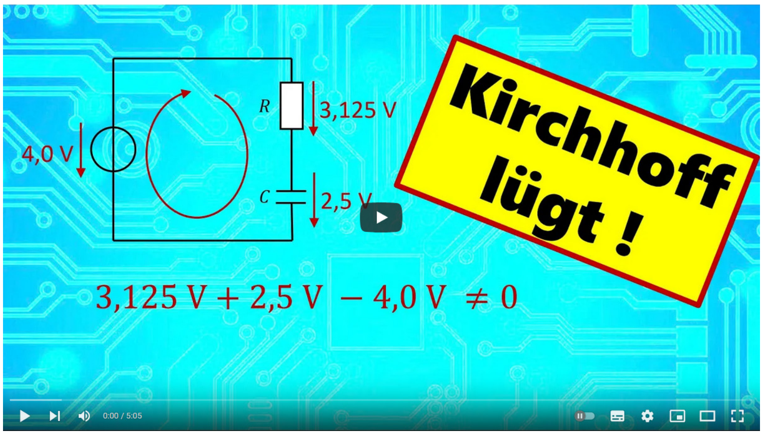
https://www.youtube.com/watch?v=0EwZ_nEj8DM

ohmsch-kapazitive Impedanz



https://www.youtube.com/watch?v=avXmtox0GxE

Kirchhoff in Wechselstromschaltungen



https://youtu.be/bxzUe5sWf8k

Trainingsaufgaben: Wechslstromschaltungen

Ein Widerstand R und eine Iduktivität L sind in Reihe geschaltet und werden von dem Wechselstrom $\underline{I}$ durchflossen.

1. Wie groß sind die Spannungsabfälle $\underline{U}_R$ am Wider
2. Wie groß ist der Betrag U des Sp tung?
3. Wie gro
4.

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Wechselstromschaltungen.pdf

Übungsaufgabe: RL-Reihenschaltung

Die Reihenschaltung eines Widerstandes $R = 470\ \Omega$ und mit der Induktivität $L = 1{,}2\,\mathrm{H}$ wird von einem sinusförmigen Wechselstrom $I = 0{,}5\,\mathrm{A}$ durchflossen ($f = 50\,\mathrm{Hz}$).

1. Wie groß ist die gesamte Spannung U an dem durch die Reihenschaltung von R und L gebildeten Zweipol?
2. Wie groß ist der Phasenverschiebungswinkel φ zwischen Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$?

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a75_1.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=mEnX58iNa8M

Übungsaufgabe: RC-Parallelschaltung

Eine Parallelschaltung aus einem Widerstand $R = 1{,}5\,\mathrm{k}\Omega$ und einem Kondensator $C = 0{,}1\ \mu\mathrm{F}$ wird an eine sinusförmige Wechselspannung $U = 10\,\mathrm{V}$ gelegt ($f = 2{,}5\,\mathrm{kHz}$).

1. Welcher Phasenwinkel φ besteht zwischen der Spannung $\underline{U}$ und dem Gesamtstrom $\underline{I}$?
2. Ermitteln Sie die Beträge der Teilströme $\underline{I}_R$ und $\underline{I}_C$ sowie des Gesamtstroms $\underline{I}$.

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a75_3.pdf
https://youtu.be/s3j-RBuVuGQ

Übungsaufgabe: Spannungsteiler bei Wechseltrom

Eine Projektionslampe, deren Betriebswerte mit $U = 75\,\mathrm{V}$ und $P = 250\,\mathrm{W}$ angegeben sind, soll durch Vorschalten einer Drossel an einem Versorgungsnetz mit der Spannung $U_\mathrm{N} = 230\,\mathrm{V}$ und der Frequenz $f = 50\,\mathrm{Hz}$ betrieben werden.

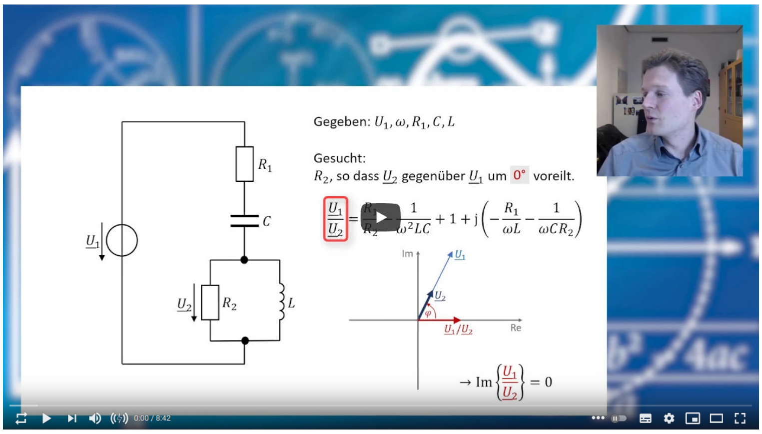
1. Welche Induktivität L muss die Drosselspule aufweisen?
2. Wie groß sind die Scheinleistung S und Blindleistung Q der gesamten Anordnung?
3. Wie groß ist der Leistungsfaktor λ?

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

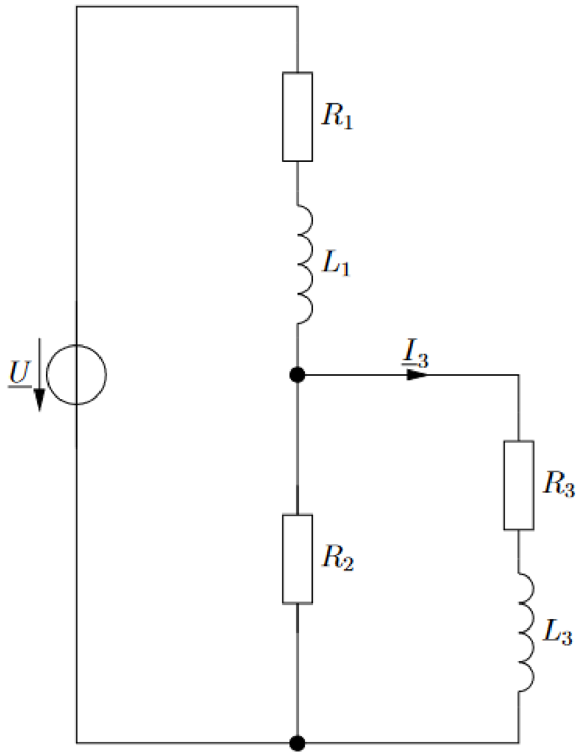
http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a77_3.pdf
https://youtu.be/hD8IKksO1Nw

Aufgabentyp: Phasenverschiebung einstellen



https://www.youtube.com/watch?v=P3O6O4jDUII

Übungsaufgabe: Die Hummelschaltung

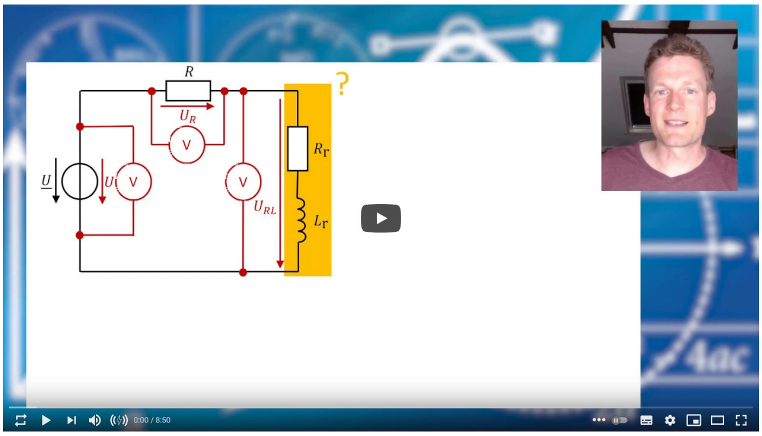


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

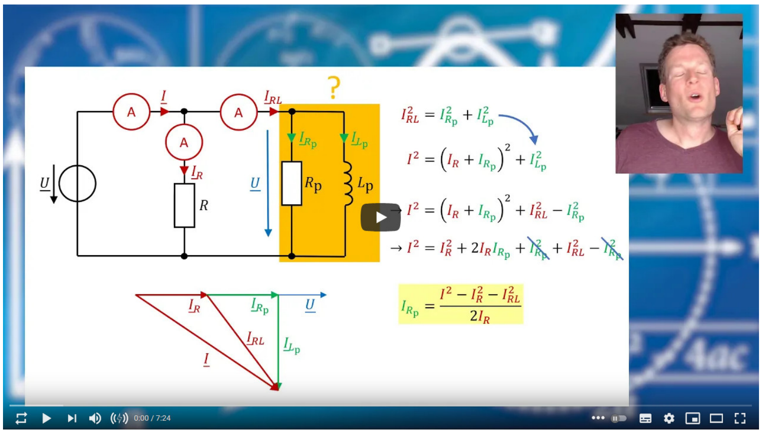
http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a75_7.pdf
https://youtu.be/X-ozygjpmXE

3-Voltmeter-Messschaltung



https://www.youtube.com/watch?v=aKmj7qD728A

3-Amperemeter-Messschaltung



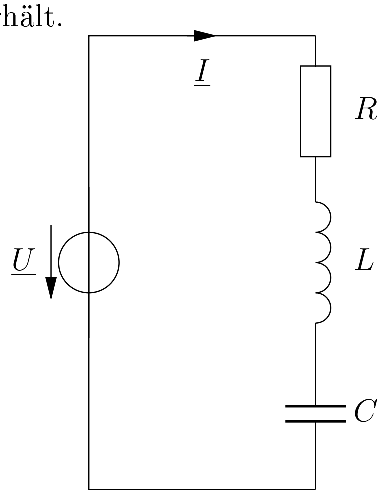
https://www.youtube.com/watch?v=05HES7zKJnw

5.6. Schwingkreise

Unter dem Begriff „Schwingungen“ versteht man in der Elektrotechnik den wiederholten, wechselseitigen Energieaustausch zwischen zwei oder mehreren Speichern für verschiedene Energieformen, also zwischen Schaltelementen, bei denen eine Energiespeicherung durch elektrische und magnetische Felder auftritt. Ein Schwingkreis enthält damit wenigstens eine Kapazität C, eine Induktivität L und – da L und C nur mittels verlustbehafteter Bauelemente (Spule, Kondensator) realisierbar sind – zusätzlich einen ohmschen Widerstand R. Je nach Anordnung dieser Elemente unterscheidet man noch zwischen Reihen- und Parallelschwingkreis.

5.6.1. Reihenschwinkreis

Ein Reihenschwingkreis besteht aus zwei unterschiedlichen energiespeichernden Bauelementen (L und C), sowie einem verlustbehafteten Bauelement (R). Die speisende Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung U und eine frei einstellbare Kreisfrequenz ω. Im Folgenden analysieren wir, wie sich der Strom I in Abhängigkeit von ω verhält.



$$
\begin{aligned}
U &= \text{const} \\
\omega &= 0 \ldots \infty \\
I(\omega = 0) &= 0: \text{ Kondensator leitet keinen Strom} \\
I(\omega \to \infty) &= 0: \text{ Spule leitet keinen Strom} \\[1ex]
I_{\text{max}} &= ? \\
\omega(I_{\text{max}}) &= ?
\end{aligned}
$$

Der Reihenschwingkreis führt bei $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$ keinen Strom. Es muss also eine Kreisfrequenz geben, bei welcher der Strom maximal ist. Nach dem Ohmschen Gesetz $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ ist der Strom maximal, wenn der Betrag der Schwingkreisimpedanz $\underline{Z}$ minimal ist.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z} &= R + \mathrm{j}\omega L - \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\
&= \underbrace{R}_{\text{frequenzunabh.}} + \mathrm{j} \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}_{\text{abh. von } \omega}
\end{aligned}
$$

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Der Realteil der Impedanz ist unabhängig von ω, der Imaginärteil hingegen schon; er kann sogar Null werden.

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} &\overset{!}{=} 0 \\
\rightarrow \omega L &\overset{!}{=} \frac{1}{\omega C} \\
\Rightarrow \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0
\end{aligned}
$$

- $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ heißt “Resonanzfrequenz”.
- In einem Reihenschwingkreis ist der Strom bei Resonanz am größten. Im Widerstand wird die größte Leistung umgesetzt.
  $P_{\max} = I_{\max}^2 \cdot R$
- Bei den “Grenzfrequenzen” f_1 und f_2 ist die Leistungsaufnahme $\frac{P_{\max}}{2}$.

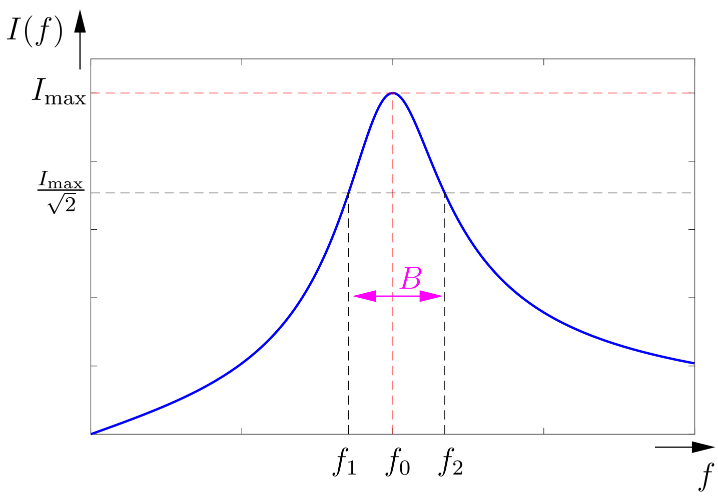
$$P_{1,2} = \frac{I_{\max}^2 \cdot R}{2} \qquad \Rightarrow \qquad I_{1,2} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

- Die „Bandbreite“ eines Schwingkreises ist

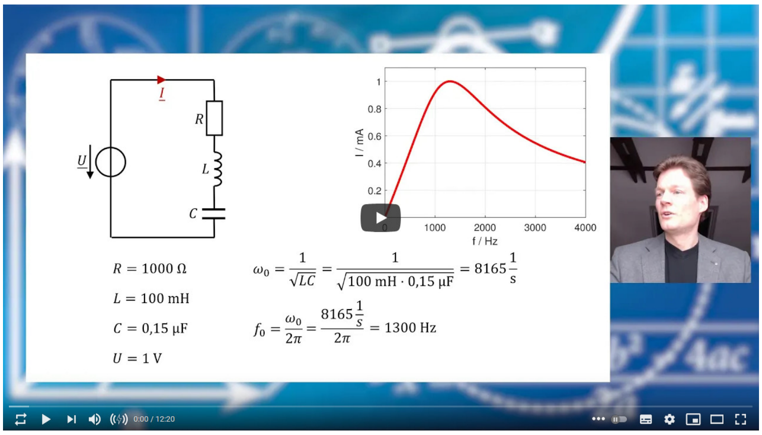
$$B = f_2 - f_1.$$

- Die „Güte“ ist

$$Q = \frac{f_0}{B}.$$



Schwingkreis Teil 1: Resonanzfrequenz f_0, Bandbreite B und Güte Q



https://www.youtube.com/watch?v=xBzhSj3pkek

Bandbreite des Reihenschwingkreises

Im Folgenden möchten wir den Wert der Bandbreite berechnen. Wir wissen, dass bei den Grenzfrequenzen der Strom um den Betrag $\sqrt{2}$ kleiner ist, als bei der Resonanzfrequenz. Dies bedeutet, dass der Betrag der Impedanz um den Faktor $\sqrt{2}$ größer sein muss.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}(\omega) &= R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\
\underline{Z}(\omega_0) &= R \\
\underline{Z}(\omega_1) &= R + \mathrm{j}\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right) \\
\underline{Z}(\omega_2) &= R + \mathrm{j}\left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)
\end{aligned}
$$

Der Betrag der Impedanz ist dann um $\sqrt{2}$ größer als bei Resonanz, wenn der Betrag des Imaginärteils gleich dem Betrag des Realteils ist.

$$
\begin{aligned}
R &= -\left(\omega_1 L - \tfrac{1}{\omega_1 C}\right) && \text{(kapazitives Verhalten)} \\
\text{oder}\quad R &= \omega_2 L - \tfrac{1}{\omega_2 C} && \text{(induktives Verhalten)}
\end{aligned}
$$

Diese beiden Gleichungen kann man nun nach ω_1 bzw. ω_2 auflösen:

Für ω_1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} &= -R \\
\omega_1^2 + \omega_1 \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} &= 0 \\
\rightarrow \omega_1 &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\
\text{die Frequenz kann nicht negativ sein} \quad \Rightarrow \omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.
\end{aligned}$$

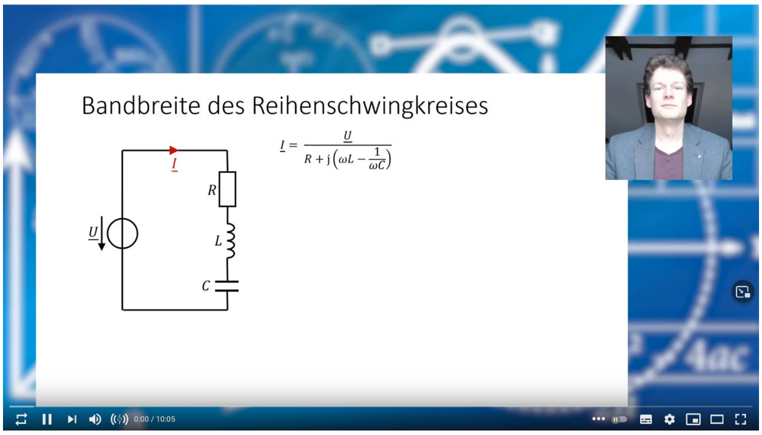
Und für ω_2:

$$\begin{aligned}
\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} &= R \\
\omega_2^2 - \omega_2 \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} &= 0 \\
\rightarrow \omega_2 &= +\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\
\text{die Frequenz kann nicht negativ sein} \quad \Rightarrow \omega_2 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.
\end{aligned}$$

Die Bandbreite wird in der Regel als Frequenz und nicht als Kreisfrequenz angegeben. Sie lautet also

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2\pi}\left(\omega_2 - \omega_1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right) - \left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right)\right] \\
&= \frac{R}{2\pi L}
\end{aligned}$$

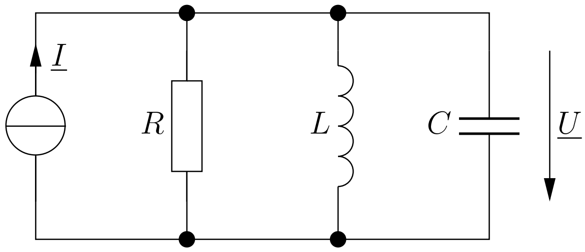
Schwingkreis Teil 2: Berechnung der Bandbreite



https://www.youtube.com/watch?v=8rv27s-gAG8

5.6.2. Parallelschwingkreis

Die unten stehende Schalung wird von einer Wechselstromquelle mit konstantem Strom I und variabler Kreisfrequenz ω gespeist. Analog zum Reihenschwingkreis werden wir im Folgenden analysieren, wie sich der Spannungsabfall U an der Schaltung in Abhängigkeit von ω verhält.



$$\begin{aligned} I &= \text{const} \\ \omega &= 0 ... \infty \\ U(\omega = 0) &= 0: \text{ Spule wird zum Kurzschluss} \\ U(\omega \to \infty) &= 0: \text{ Kondensator wird zum Kurzschluss} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\max} &= ? \\ \omega(U_{\max}) &= ? \end{aligned}$$

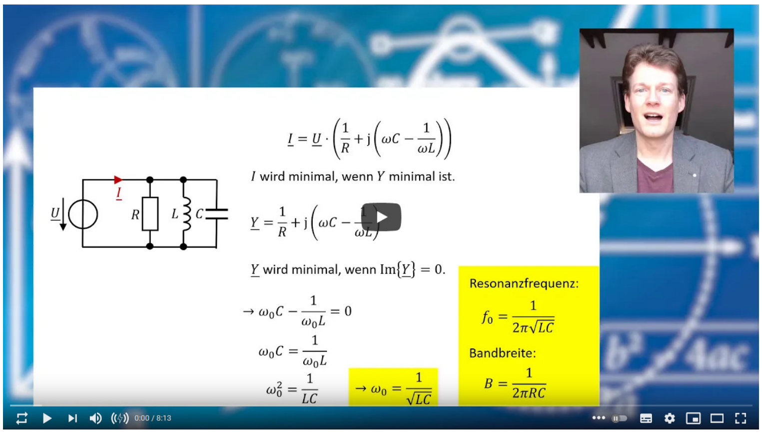
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$\underline{U}$ wird maximal, wenn $\underline{Z}$ maximal wird, bzw. $\underline{Y}$ minimal wird.

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C \\ &= \underbrace{\frac{1}{R}}_{\text{frequenzunabh.}} + \mathrm{j} \underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}_{\text{abh. von } \omega} \end{aligned}$$

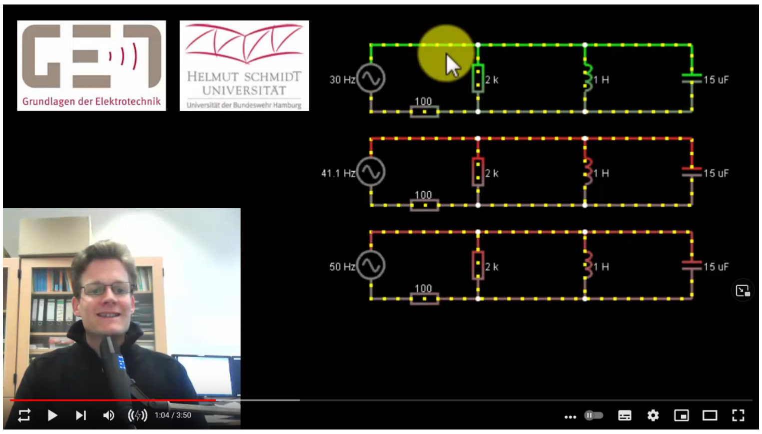
$$\begin{aligned} \to \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} &\overset{!}{=} 0 \\ \to \omega C &\overset{!}{=} \frac{1}{\omega L} \\ \Rightarrow \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

Schwingkreis Teil 3: Der Parallelschwingkeis



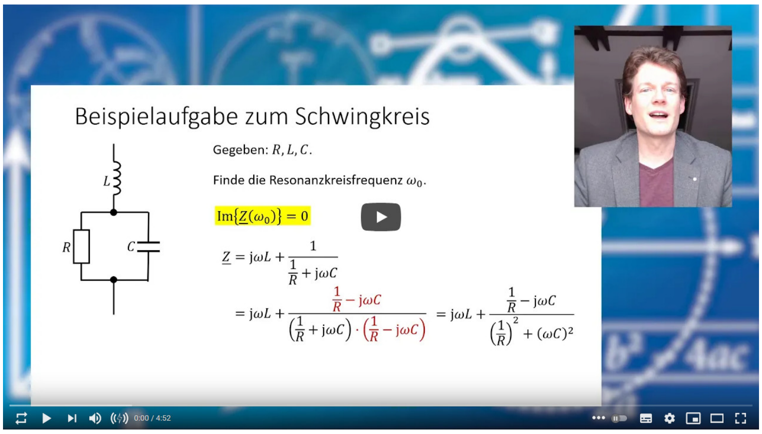
https://www.youtube.com/watch?v=W1A4T1vTcxY

Ströme im Parallelschwingkreis



https://www.youtube.com/watch?v=qRSOR6l6vxA

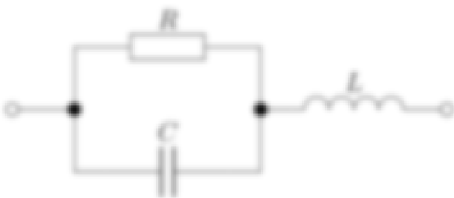
Schwingkreis Teil 4: Wichtiges Beispiel



https://www.youtube.com/watch?v=-Trx7akqAA4

Trainingsaufgaben: Schwingkreise

Gegeben ist die folgende Schaltung:

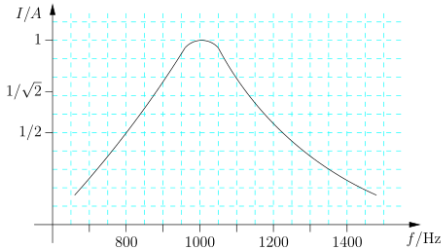


1. Bestimmen Sie die komplexe Impedanz $\underline{Z}$ der Schaltung.
2. Berechnen Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_0 der Schaltung.

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Schwingkreise.pdf

Übungsaufgabe: Schwingkreis identifizieren

Ein Schwingkreis wird an eine ideale Spannungsquelle mit variabler Frequenz f angeschlossen. Im Folgenden ist der Betrag des sich einstellenden Stroms in Abhängigkeit von der Frequenz gezeichnet:

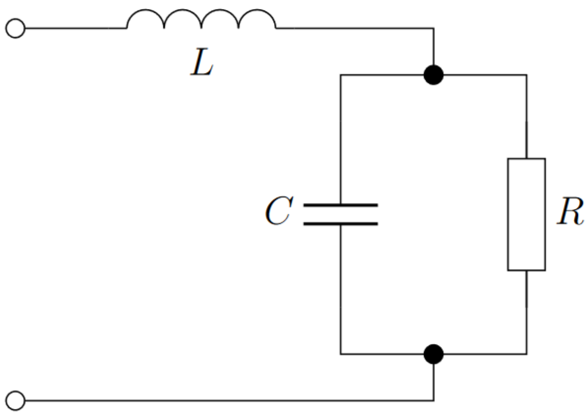


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aSchwingkreis_3.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=TlfH4wHKRUg

Übungsaufgabe: Schwingkreis – Resonanzfrequenz & Co berechnen



Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aSchwingkreis_4.pdf
https://youtu.be/iQiThloG0wQ

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

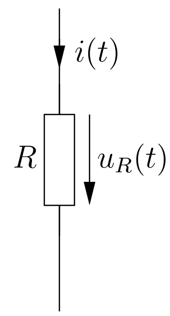
5.7. Leistung in Wechselstromkreisen

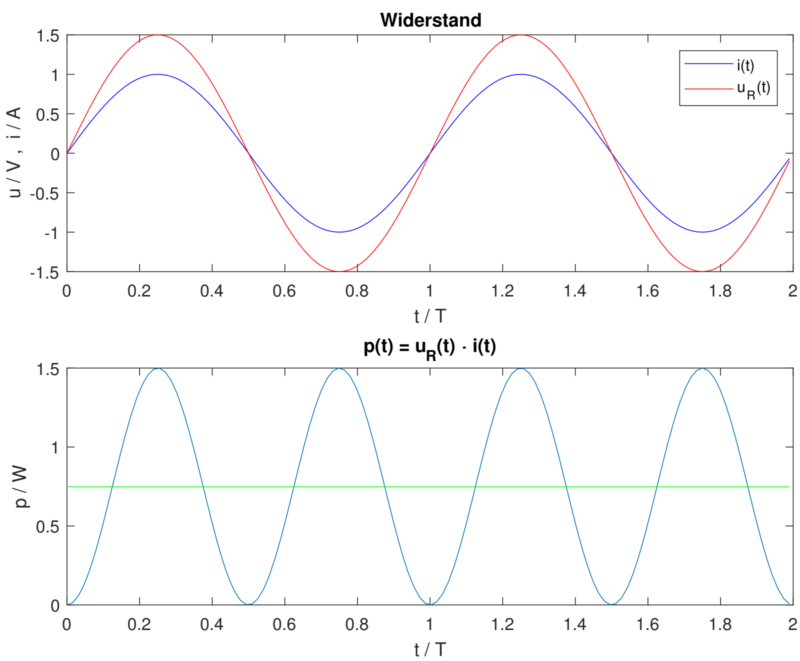
Im Folgenden betrachten wir verschiedene Beispiele, um die Besonderheiten der elektrischen Leitung in Wechselstromkreisen zu verstehen.

5.7.1. Betrachtung im Zeitbereich

Wirkleistung P

Ein Widerstand $R = 1,5\,\Omega$ wird von einem Strom $i(t) = 1\,\text{A}\cdot\sin(\omega t)$ durchflossen. Nach dem Ohmschen Gesetz gilt $u_R(t) = R \cdot i(t) = 1,5\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)$. Der zeitliche Verlauf der im Widerstand umgesetzten Leistung beträgt $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Die zeitlichen Verläufe sind in der folgenden Grafik dargestellt.



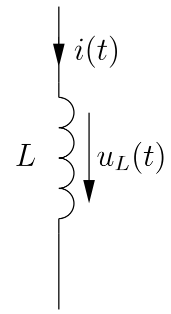


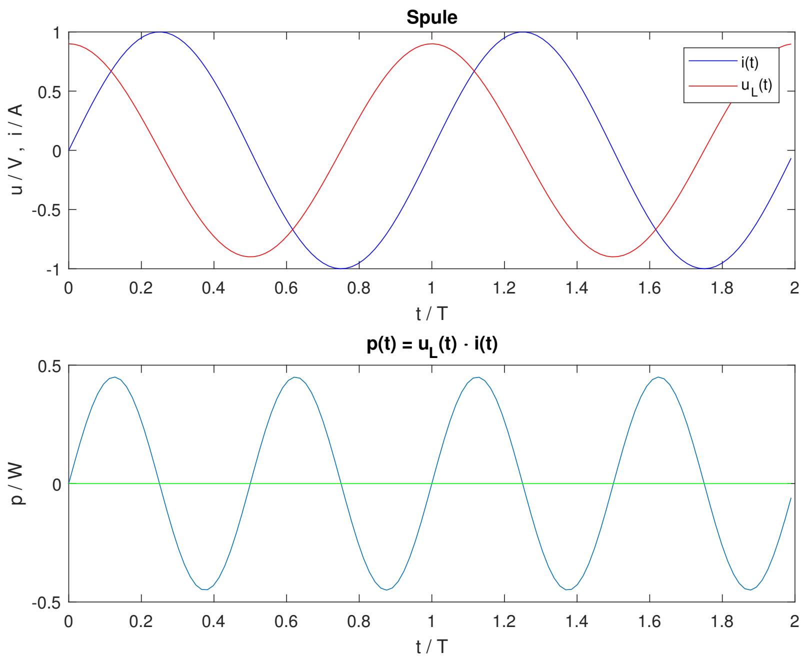
Wir erkennen, dass die elektrische Leistung zu jedem Zeitpunkt positiv oder Null ist. Der Mittelwert der im Widerstand umgesetzten Leistung entspricht dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom:

$$P = \frac{1,5\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} = 0,75\,\mathrm{W}.$$

Scheinleistung Q

Der selbe Strom $i(t) = 1\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t)$ fließt nun durch eine Spule mit der Reaktanz $X_L = \omega L = 0,9\,\Omega$. Der Spannungsabfall am Bauelement beträgt $u_L(t) = 0,9\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$. Der zeitliche Verlauf der Leistung beträgt $p(t) = u_L(t) \cdot i(t)$, wie in der folgenden Grafik dargestellt:





Wieder ist die Leistungsaufnahme des Bauelements eine zeitlich veränderliche Funktion. Jedoch fällt auf, dass die aufgenommene Leistung im zeitlichen Mittel Null ist. Die Spule hat keine Energie verbraucht! Während der positiven Halbwellen von $p(t)$ hat sie Energie aufgenommen und in den negativen Halbwellen wieder abgegeben. (Wenn

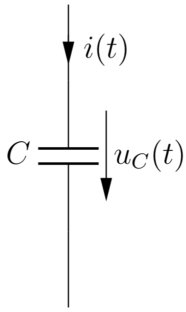
Sie eine ideale(!) Spule zu Hause an die Steckdose anschließen, wird ihr Stromzähler im Keller deswegen nicht schneller drehen!)

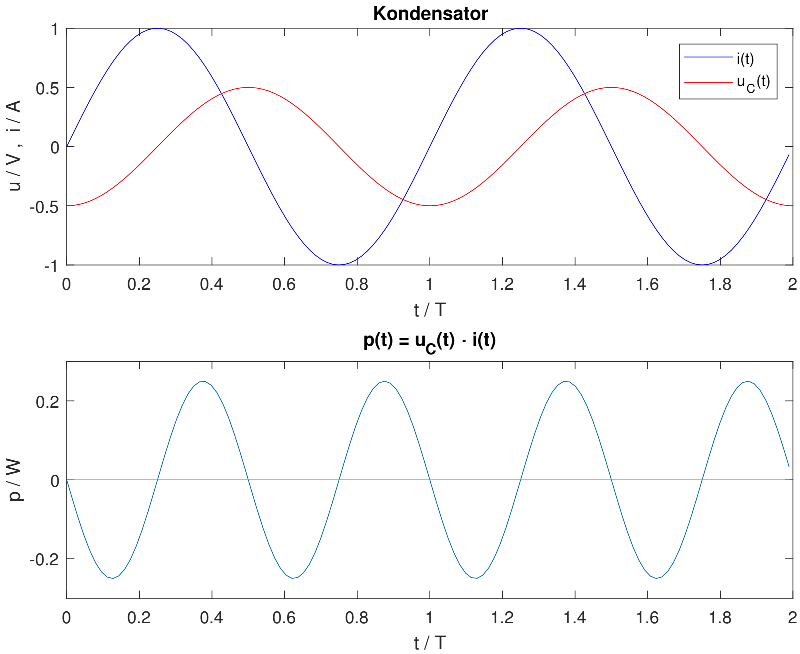
Es fließt dennoch ein Strom durch das Bauelement und es fällt eine Spannung ab. Wir nennen das Produkt der Effektivwerte „Blindleistung“:

$$Q = \frac{0,9\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} = 0,45\,\mathrm{var}.$$

Die Einheit „var“ steht für Volt-Ampere-reaktiv.

Als nächstes betrachten wir einen Kondensator mir der Reaktanz $X_C = \frac{1}{\omega C} = 0,5\,\Omega$, der wieder von dem selben Strom durchflossen wird. An ihm fällt die Spannung $u_C(t) = 0,5\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t - \pi/2)$ ab.



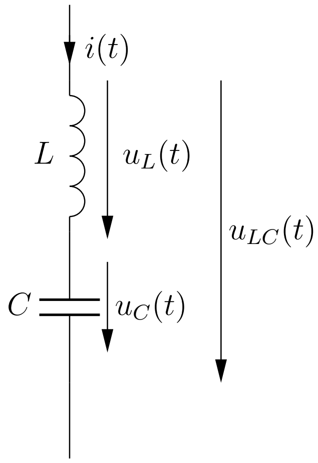


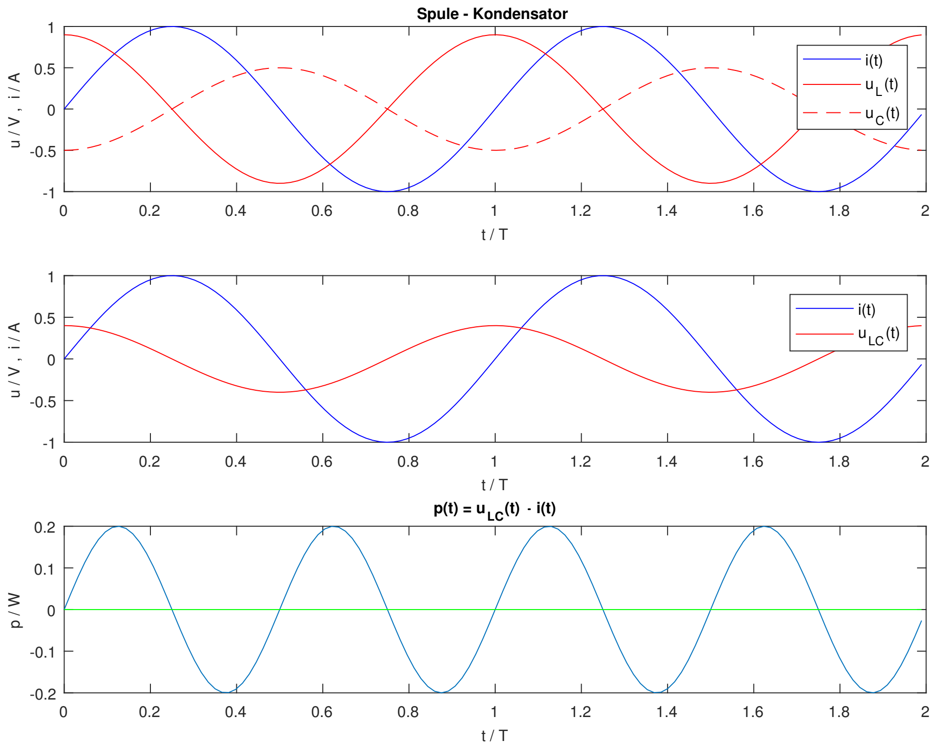
Wieder ist der Mittelwert der aufgenommenen Leistung Null. Jedoch fällt im Vergleich mit der Spule auf, dass der zeitliche Verlauf der Leistungsaufnahme am Kondensator immer negativ ist, wenn er an der Spule positiv ist und umgekehrt. Darum definiert man die Blindleistungs„aufnahme“ am Kondensator negativ:

$$Q = -\frac{0,5\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} = -0,25\,\mathrm{var}.$$

Dies hat wichtige Konsequenzen, wie wir am folgenden Beispiel sehen werden.

Nun schalten wir die Spule und den Kondensator in Reihe und lassen wieder den zuvor verwendeten Strom durch die Elemente fließen. Die Teilspannungen an den Bauelementen addieren sich zu der Gesamtspannung $u_{LC}(t)$. Die zeitabhängige Leistung beträgt also $p(t) = u_{LC}(t) \cdot i(t)$.





Wieder ist der Mittelwert der Leistungsaufnahme Null. Die Blindleistung lässt sich aus dem Produkt der Effektivwerte der Gesamtspannung und des Stroms bestimmen. Da der Phasenverschiebungswinkel zwischen den Spannungen $u_L(t)$ und $u_C(t)$ exakt 180°

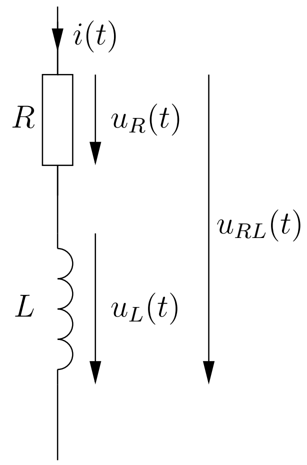
beträgt, erhält man die Amplitude der Summenspannung, indem man die Amplituden der Einzelspannungen voneinander abzieht.

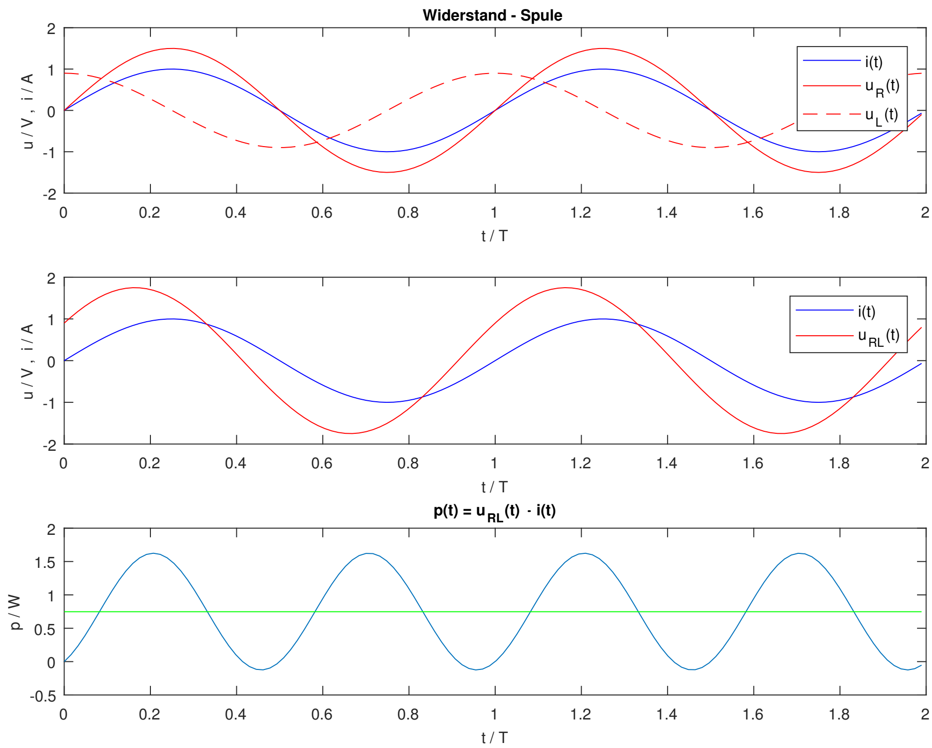
$$\begin{aligned} Q &= \frac{0,9\,\mathrm{V} - 0,5\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} = 0,2\,\mathrm{var} \\ &= Q_L - Q_C = 0,45\,\mathrm{var} - 0,25\,\mathrm{var} = 0,2\,\mathrm{var} \end{aligned}$$

Die Blindleistungsaufnahme der Reihenschaltung ist also die Summe der Aufnahme der Einzelelemente, wobei die Blindleistung am Kondensator negativ gezählt wird.

Scheinleistung S

Bei den voran gegangenen Beispielen hatten wir es entweder mit reiner Wirkleistungs- oder Blindleistungsaufnahme zu tun. Nun werden wir uns ein Beispiel ansehen, bei dem beides gleichzeitig auftritt.





Wir erkennen, dass die Leistungsaufnahme erneut den zeitlich abhängigen Verlauf annimmt. Da jedoch der Widerstand Wirkleistung aufnimmt und die Spule Blindleistung, ist die Leistungsaufnahme nicht mehr eindeutig definierbar. Wir behelfen uns mit einer neuen Definition und nennen das Produkt aus den Effektivwerten von Strom und Gesamtspannung Scheinleistung

$$S = \frac{\sqrt{(1,5\,\mathrm{V})^2 + (0,9\,\mathrm{V}^2)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} \approx 0,875\,\mathrm{VA}$$

Zur Berechnung der Gesamtspannung müssen wir den Satz von Pythagoras anwenden, da $u_R(t)$ und $u_L(t)$ um 90° phasenverschoben sind. Die Einheit der Scheinleistung ist VA (Volt-Ampere).

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Unter Anwendung von trigonometrischen Additionstheoremen lässt sich die Augenblicksleistung in Wirk- und Blindanteil zerlegen:

$$
\begin{aligned}
p(t) = u(t) \cdot i(t) &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t) \\
&= \frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(\omega t) \\
\Bigg[\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \Bigg] \\
&= \frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{2} \cdot \Big(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi) \Big) \\
\Bigg[\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \Bigg] \\
&= \frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{2} \cdot \Big(\cos(\varphi) - \big[\cos(2\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \sin(2\omega t) \cdot \sin(\varphi) \big] \Big) \\
&= \frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{2} \cdot \Big(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t) \cdot \cos(\varphi) + \sin(2\omega t) \cdot \sin(\varphi) \Big) \\
&= \underbrace{\frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{2} \cdot \cos(\varphi)}_{P} \cdot (1 - \cos(2\omega t)) + \underbrace{\frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{2} \cdot \sin(\varphi)}_{Q} \cdot \sin(2\omega t).
\end{aligned}
$$

Der Term $1 - \cos(2\omega t)$ beschreibt die zeitliche Änderung der Wirkleistung und $\sin(2\omega t)$ die der Blindleistung.

5.7.2. Betrachtung in der komplexen Ebene

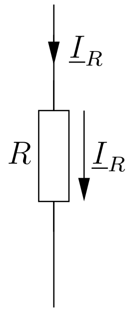
Bei Verwendung der komplexen Schreibweise von Strom und Spannung, berechnet sich die komplexe Scheinleistung wie folgt:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*,$$

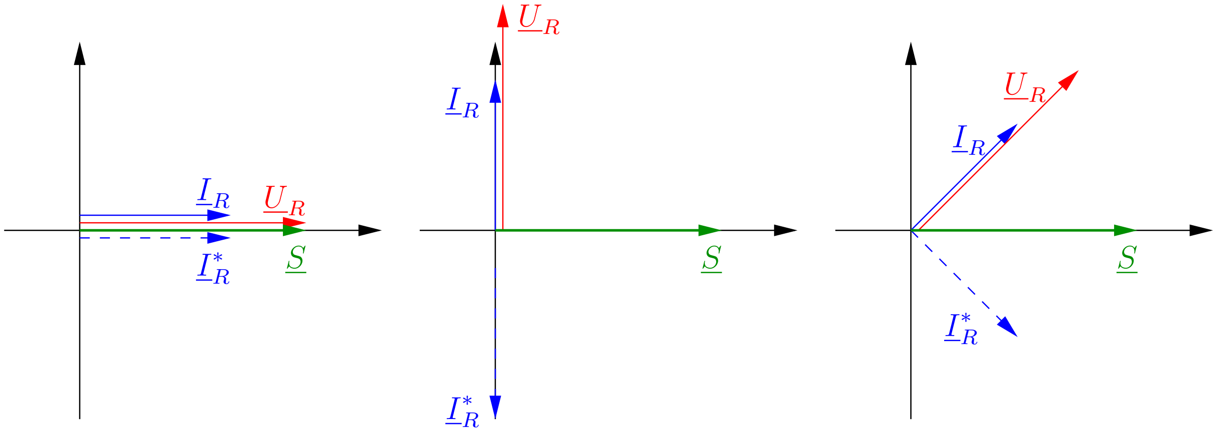
wobei $\underline{I}^*$ die Konjugiertkomplexe des Stoms ist (Realteil bleibt gleich, der Imaginärteil ändert das Vorzeichen). In den folgenden Beispielen werden wir den Sinn dieser Definition verstehen.

Scheinleistung am Widerstand

Wir betrachten einen Widerstand R, der vom Strom $\underline{I}_R$ durchflossen wird. Der Spannungsabfall beträgt $\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$.

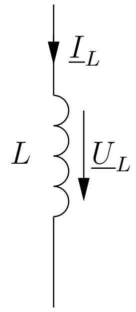


Egal welchen Phasenwinkel der Strom annimmt, die Scheinleistung $\underline{S} = \underline{U}_R \cdot \underline{I}_R^*$ ist immer rein reell.



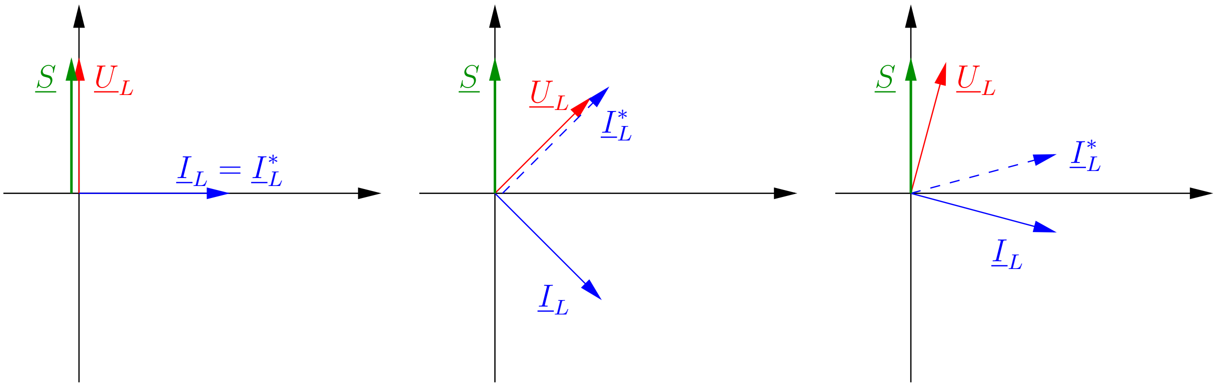
Scheinleistung an der Spule und am Kondensator

Als nächstes betrachten eine Spule L, die vom Strom $\underline{I}_R$ durchflossen wird. Der Spannungsabfall beträgt $\underline{U}_L = \mathrm{j}\omega L \cdot \underline{I}_L$.

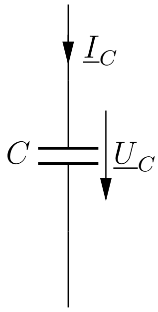


Egal welchen Phasenwinkel der Strom annimmt, die Scheinleistung $\underline{S} = \underline{U}_L \cdot \underline{I}_L^*$ ist immer rein imaginär und positiv.

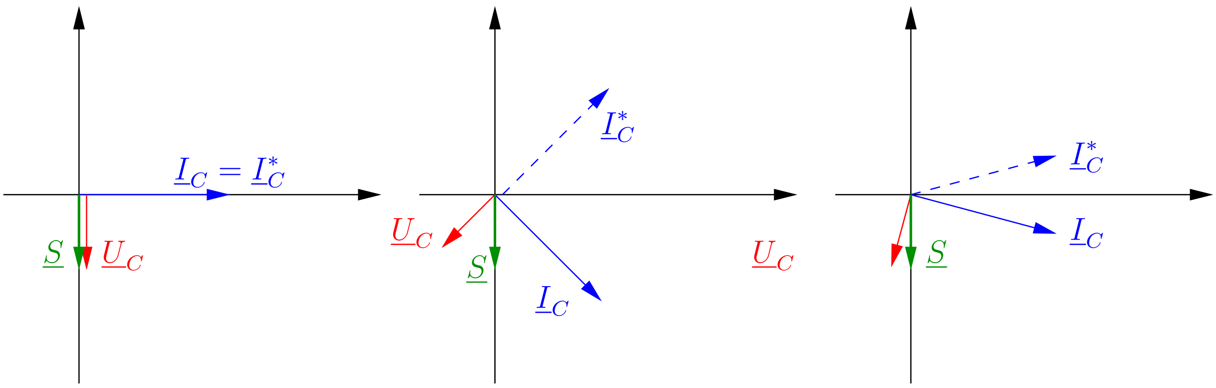
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.



Bei einem Kondensator beträgt der Spannungsabfall $\underline{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \cdot \underline{I}_C$.

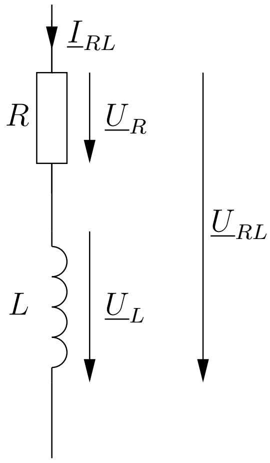


Egal welchen Phasenwinkel der Strom annimmt, die Scheinleistung $\underline{S} = \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^*$ ist immer rein imaginär und negativ.

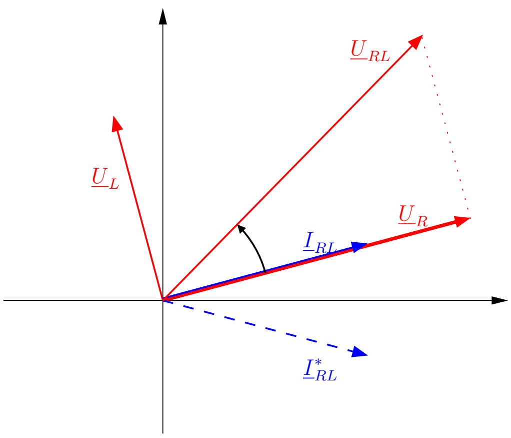


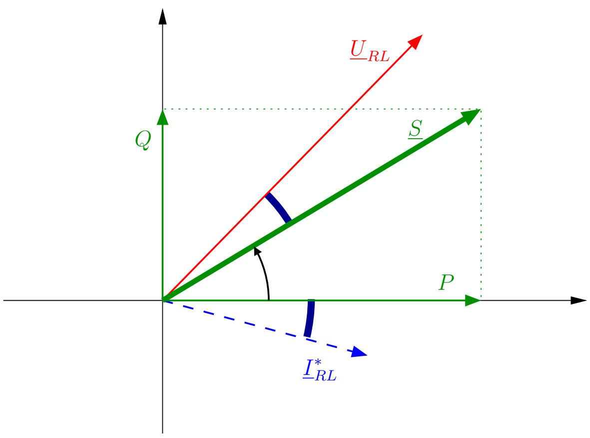
Scheinleistung an R-L

Zuletzt betrachten wir die Reihenschaltung aus einem Widerstand und einem Kondensator, die vom Strom $\underline{I}_{RL}$ durchflossen wird. Der Spannungsabfall beträgt $\underline{U}_{RL} = (R + \mathrm{j}\omega L) \cdot \underline{I}_{RL}$.



Im folgenden Bild wird das Zeigerdiagramm nur für einen Phasenwinkel von $\underline{I}_{RL}$ dargestellt. Links ist zu sehen, wie der Strom, die Teilspannungen, die Gesamtspannung und die Konjugiertkomplexe des Stroms zueinander stehen. Rechts sind der konjugiertkomplexe Strom, die Gesamtspannung und die komplexe Scheinleistung eingezeichnet.



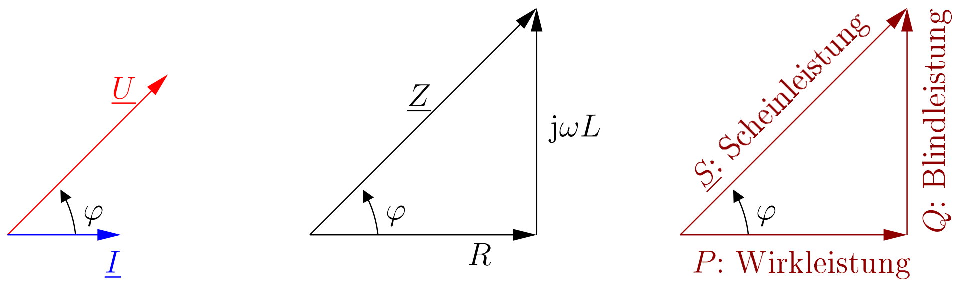


Man erkennt folgende wichtige Dinge:

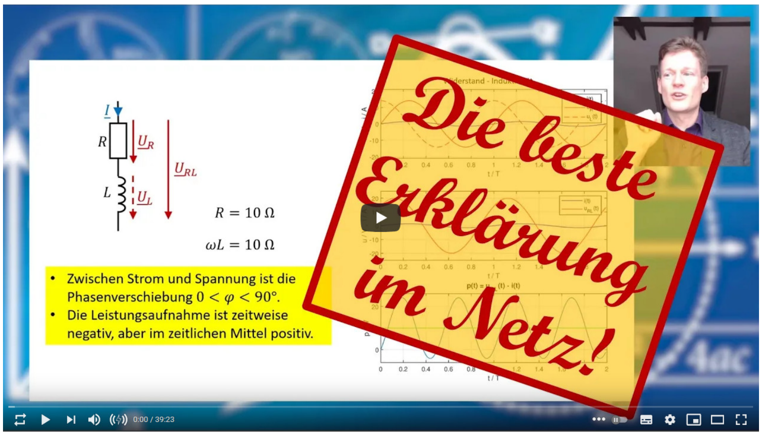
- Der Realteil der komplexen Scheinleistung entspricht der in der Schaltung umgesetzten Wirkleistung (dies geschieht im Widerstand):
  $P = \mathrm{Re}\{\underline{S}\}$
- Der Imaginärteil der komplexen Scheinleistung entspricht der in der Schaltung umgesetzten Blindleistung (dies geschieht in der Spule):
  $Q = \mathrm{Im}\{\underline{S}\}$
- Es gilt also $\underline{S} = P + \mathrm{j}Q$. Für die Beträge bedeutet das $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (berechnet mit Pythagoras).

Ebenfalls erkennt man am letzten Beispiel, dass $\underline{S}$ den selben Winkel besitzt, wie auch der Phasenverschiebungswinkel zwischen $\underline{U}_{RL}$ und $\underline{I}_{RL}$ aufweist. Tatsächlich finden wir den selben Winkel in drei verschiedenen Zeigerbildern:

1. Zwischen $\underline{I}$ und $\underline{U}$,
2. zwischen R und $\underline{Z}$, und
3. zwischen P und $\underline{S}$.



Wirk-, Blind- und Scheinleistung



https://www.youtube.com/watch?v=FkRgFE86peI

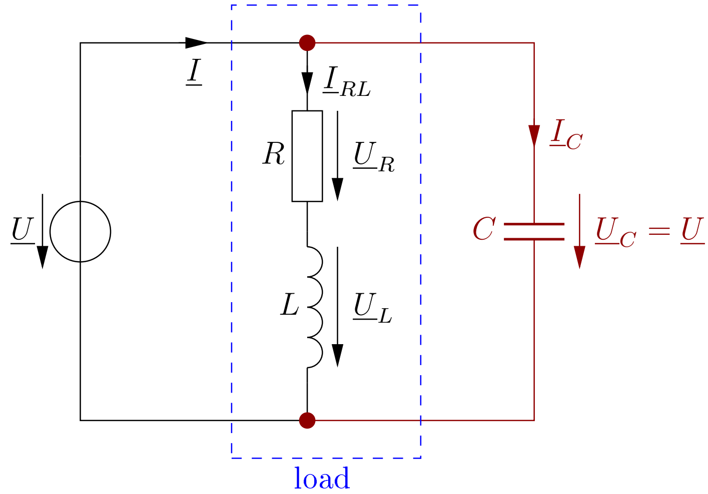
Leistungsfaktor λ

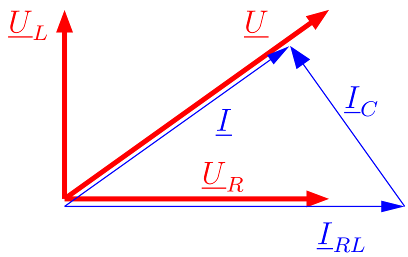
In der Praxis kann man oft nur die Beträge von Strom und Spannung messen (z. B. mit herkömmlichen Multimetern). Misst man nun also die Beträge von Strom und Spannung an einem Verbraucher, so kann man sich nur die Scheinleistung ausrechnen: $S = U \cdot I$. Um dennoch Aussagen über die Wirkleistungsaufnahme treffen zu können, gibt der Hersteller oft den Leistungsfaktor λ an. Dieser beschreibt, wie groß der Wirkleistungsanteil an der Scheinleistung ist. Gleichzeitig entspricht λ auch dem Cosinus des Phasenverschiebungswinkels, wie man leicht an dem Zeigerbild von $\underline{S}$, P und Q erkennen kann.

$$\lambda := \cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

5.7.3. Blindleistungskompensation

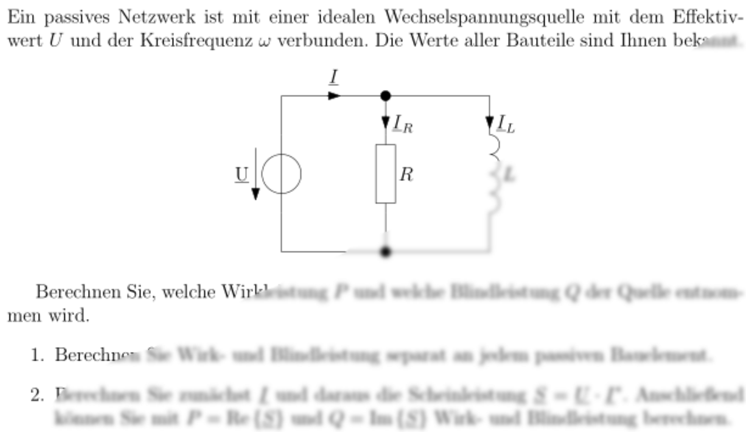
Blindleistung führt nur zu nutzlosen Strömen auf den Versorgungsleitungen. Technisch nutzen können wir sie nicht. Zum Glück kann man sie dadurch ausgleichen, dass eine Induktivität positive Blindleistung aufnimmt und ein Kapazität negative. Wir betrachten die folgende RL-Schaltung:





- Die ohmsch-induktive Last nimmt Wirk- und Blindleistung auf.
- Die Blindleistung führt nur zu höheren Leitungsströmen, hat aber keinen sinnvollen Nutzen.
- Durch das Parallelschalten eines Kondensators kann die Blindleistungsaufnahme der Spule kompensiert werden, denn der Kondensator nimmt negative Blindleistung auf, die Spule positive.

Trainingsaufgaben: Leistung in Wechselstromnetzen


Ein passives Netzwerk ist mit einer idealen Wechselspannungsquelle mit dem Effektivwert U und der Kreisfrequenz ω verbunden. Die Werte aller Bauteile sind Ihnen bek

Berechnen Sie, welche Wirk

men wird.

1. Berechnen

2.

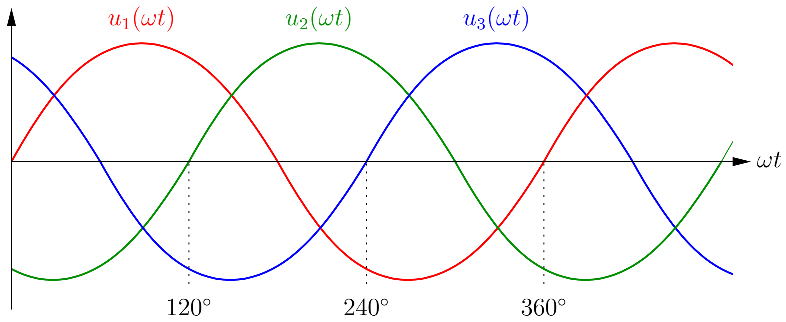
http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Leistung_in_Wechselstromnetzen.pdf

 Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

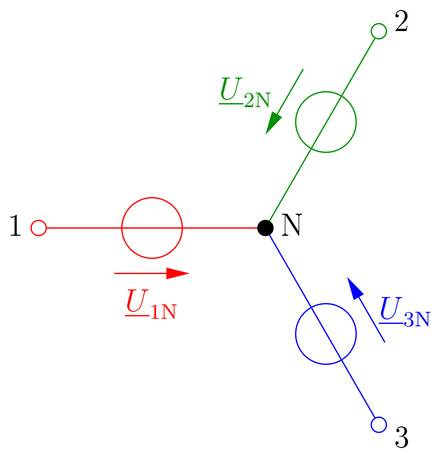
5.8. Drehstrom

Die Generatoren in unseren Stromkraftwerken besitzen auf ihrem Stator drei Wicklungen, die geometrisch um 120° versetzt angeordnet sind.

In jede Wicklung wird eine Wechselspannung induziert (230V, 50Hz), die drei Spannungen sind jedoch zueinander um je 120° phasenverschoben:



Die drei Wechselspannungsquellen werden zu einer Sternschaltung zusammengeschaltet:

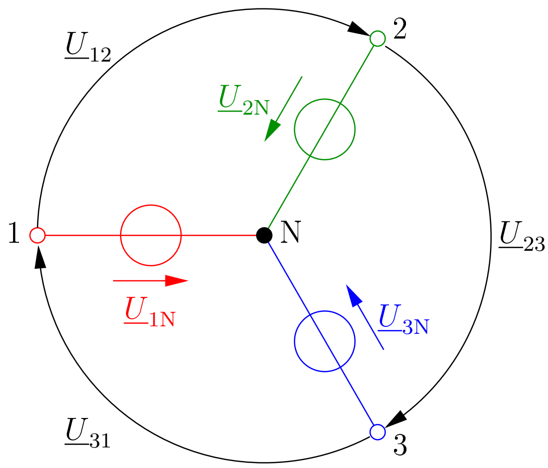


Die drei Spannungen $\underline{U}_{1\mathrm{N}}$, $\underline{U}_{2\mathrm{N}}$ und $\underline{U}_{3\mathrm{N}}$ werden auch **Strangspannungen** genannt. Definiert man die Phase von $\underline{U}_{1\mathrm{N}}$ als Nullphasenwinkel, so ergibt sich

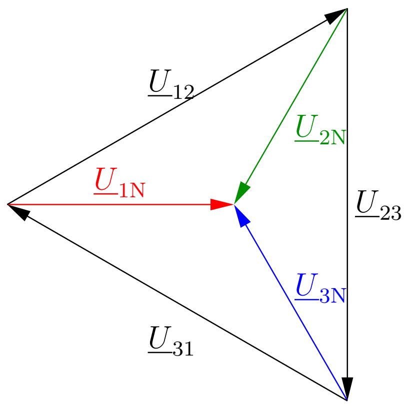
$$\begin{aligned}
\underline{U}_{1\mathrm{N}} &= U_{\mathrm{Y}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} \\
\underline{U}_{2\mathrm{N}} &= U_{\mathrm{Y}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°} \\
\underline{U}_{3\mathrm{N}} &= U_{\mathrm{Y}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}240°} = U_{\mathrm{Y}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120°} \\
\text{mit } U_{\mathrm{Y}} &= 230\,\mathrm{V}.
\end{aligned}$$

(In einer ganz normalen Haushaltssteckdose finden wir „in den Löchern“ übrigens auf der einen Seite den Nullleiter N und auf der anderen Seite eine der Phasen 1, 2 oder 3 wieder.)

Nun wollen wir uns überlegen, wie groß die Spannungen zwischen den äußeren Punkten unserer Drehstromquelle (**Außenleiterspannungen** genannt) sind.

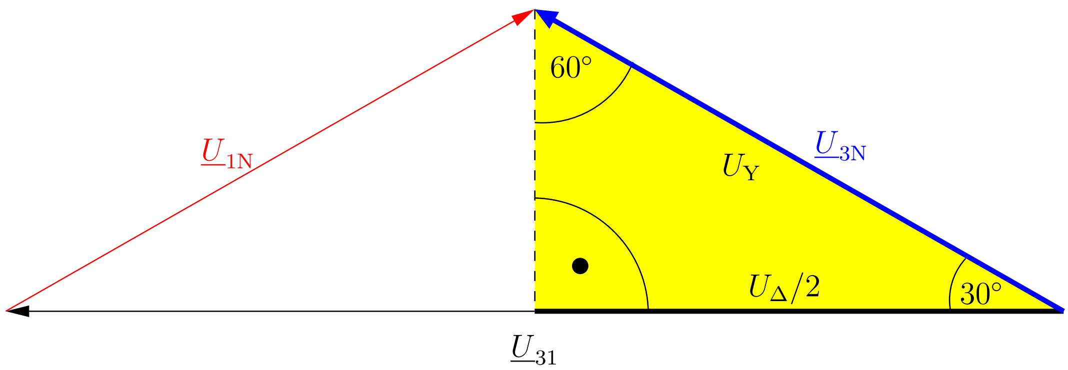


Wir zeichnen ein potential- und phasenrichtiges Zeigerbild der sechs Spannungen:



Es ist zu erkennen, dass offenbar ein festes Verhältnis zwischen den Beträgen und den Phasenwinkeln existiert. Die Winkel „in der Mitte“ betragen alle 120°. Daraus ergibt sich, dass zB der Winkel zwischen $\underline{U}_{1N}$ und $\underline{U}_{12}$ 30° betragen muss.

Um den Betrag der Außenleiterspannungen zu bestimmen, betrachten wir einen Ausschnitt des Zeigerbilds genauer:



Aus dem eingezeichneten Dreieck ist ersichtlich, dass gilt

$$\cos(30°) = \frac{U_{\Delta}/2}{U_{Y}}.$$

Daraus folgt

$$U_\Delta = 2U_\mathrm{Y}\cos(30°) = \sqrt{3}U_\mathrm{Y}.$$

5.8.1. Zusammenfassung

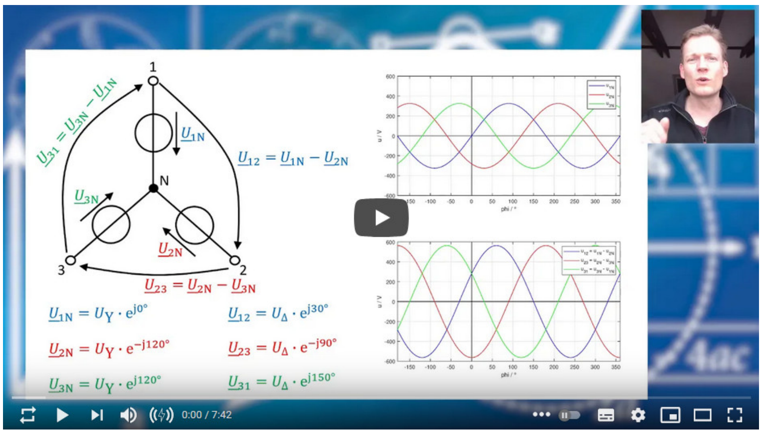
Für die Strangspannungen gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{1\mathrm{N}} &= U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} && (5.1)\\
\underline{U}_{2\mathrm{N}} &= U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°} && (5.2)\\
\underline{U}_{3\mathrm{N}} &= U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}240°} = U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120°} && (5.3)\\
\text{mit } U_\mathrm{Y} &= 230\,\mathrm{V}.
\end{aligned}$$

Für die Außenleiterspannungen gilt:

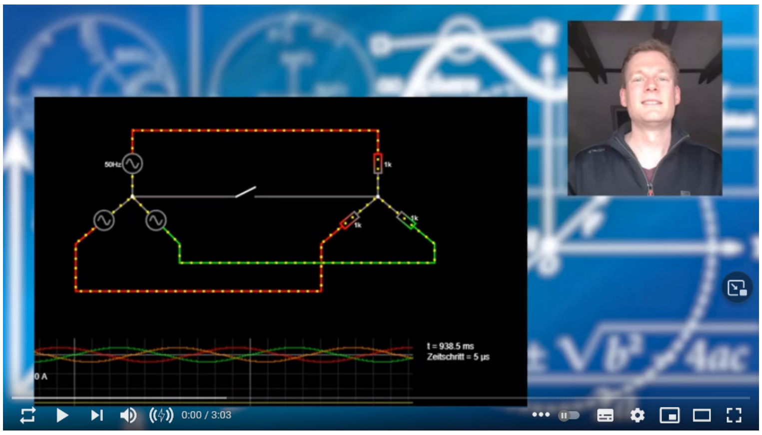
$$\begin{aligned}
\underline{U}_{12} &= U_\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}, && (5.4)\\
\underline{U}_{23} &= U_\Delta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90°}, && (5.5)\\
\underline{U}_{31} &= U_\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}150°}, && (5.6)\\
\text{mit } U_\Delta &= \sqrt{3}U_\mathrm{Y} = 400\,\mathrm{V}. && (5.7)
\end{aligned}$$

Drehstrom – Was ist das?



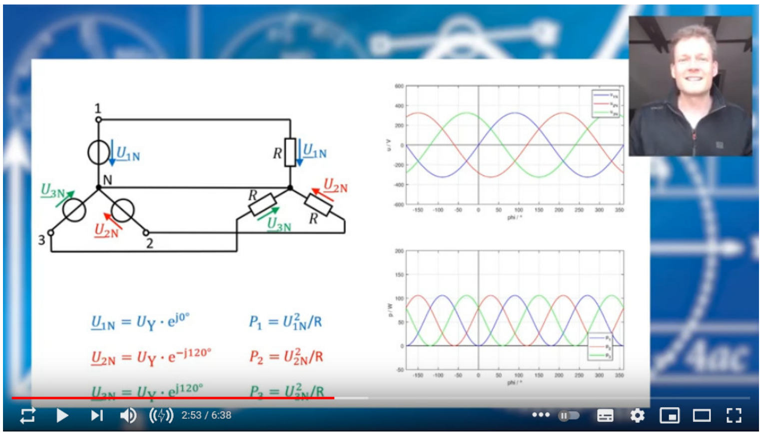
https://www.youtube.com/watch?v=T-gFgnG7XU8

Drehstrom mit symmetrischer Last



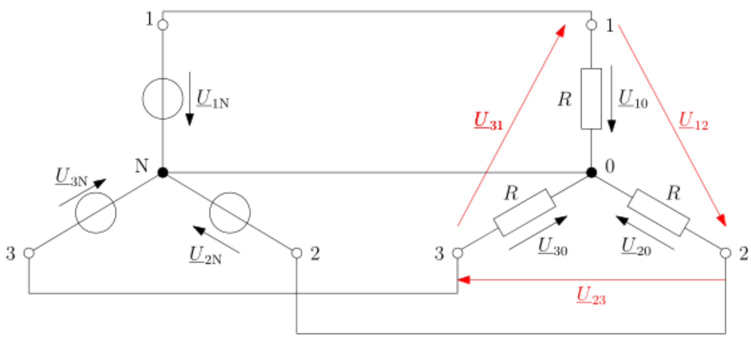
https://www.youtube.com/watch?v=o8Ec2-cDKLE

Leistung bei Drehstrom



https://www.youtube.com/watch?v=T-jPuJVfPUI

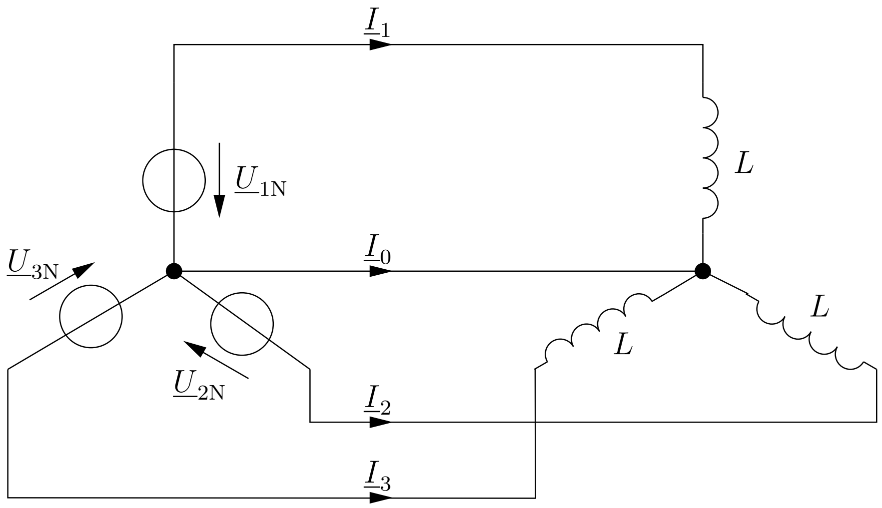
Trainingsaufgaben: Drehstrom



http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Drehstrom.pdf

5.8.2. Beispiel 1

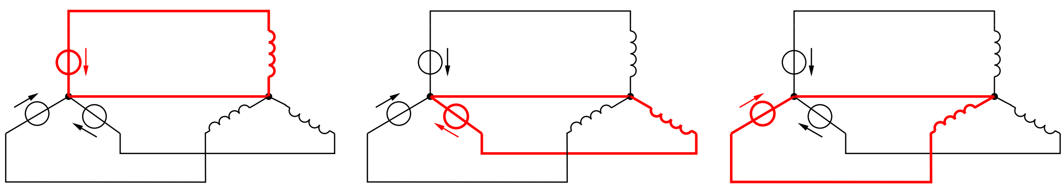
Gegeben ist folgende Schaltung:



Die Wechselspannungsquellen sind im Stern verschaltet und bilden ein Drehstrom-Erzeugersystem:
$\underline{U}_{1\mathrm{N}} = U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°}, \underline{U}_{2\mathrm{N}} = U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°}, \underline{U}_{3\mathrm{N}} = U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}240°}$, mit $U_\mathrm{Y} = 230\,\mathrm{V}$.

Berechnen Sie die Stöme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ und $\underline{I}_0$.

Lösung Da die Sternpunkte von Quelle und Last miteinander verbunden sind, fällt an jeder Impedanz der Last genau eine der Strangspannungen ab.



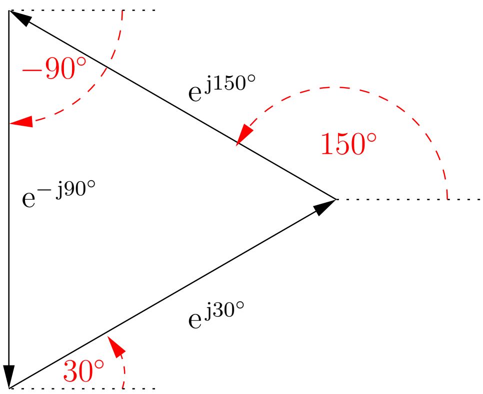
Damit lassen sich die Ströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1\mathrm{N}}}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°}}{\omega L\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}} = \frac{U_\mathrm{Y}}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90°},\\
\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2\mathrm{N}}}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°}}{\omega L\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}} = \frac{U_\mathrm{Y}}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}210°} = \frac{U_\mathrm{Y}}{\omega L}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}150°},\\
\underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3\mathrm{N}}}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}240°}}{\omega L\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}} = \frac{U_\mathrm{Y}}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}330°} = \frac{U_\mathrm{Y}}{\omega L}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}.
\end{aligned}$$

Der Strom $\underline{I}_0$ lässt sich mit dem Knotensatz berechnen:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_0 &= -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)\\
&= \frac{U_\mathrm{Y}}{\omega L}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90°} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}150°} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}\right).
\end{aligned}$$

Wir wollen nun betrachten, was die Summe der e-Funktionen ergibt. Hierfür zeichnen wir die drei Zahlen in die komplexe Zahlenebene ein:



Es zeigt sich, dass die Summe der e-Funktionen Null ergibt. Das bedeutet

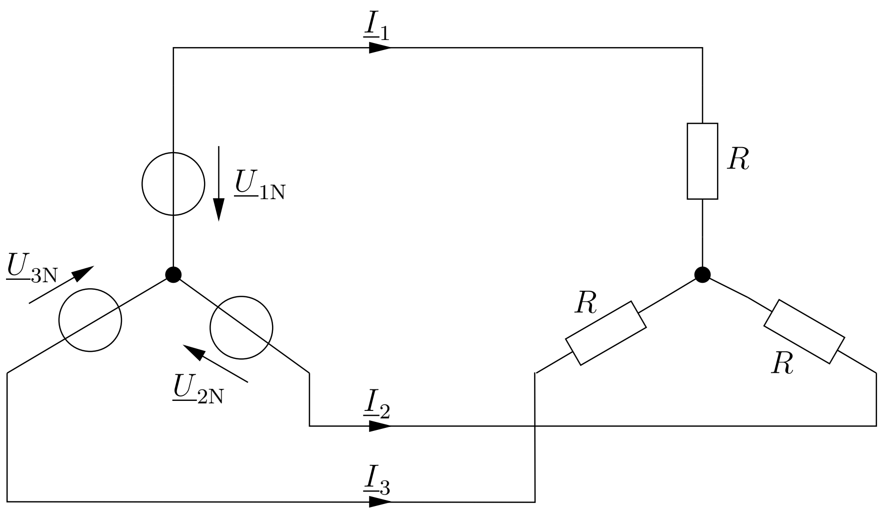
$$\underline{I}_0 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = 0.$$

Dies ist eine wichtige Erkenntnis.

Merke: Ist eine sternförmig verschaltete Last symmetrisch (d.h. alle drei Elemente der Last sind identisch), befinden sich die Sternpunkte von Quelle und Last auf dem selben Potential!

5.8.3. Beispiel 2

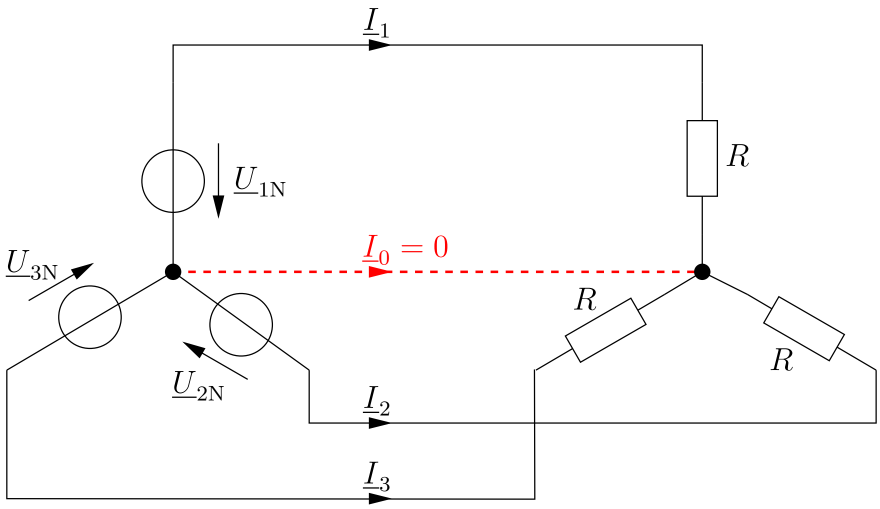
Gegeben ist folgende Schaltung:



Die Wechselspannungsquellen bilden ein Drehstrom-Erzeugersystem:
$\underline{U}_{1N} = U_Y\,e^{j0°}, \underline{U}_{2N} = U_Y\,e^{-j120°}, \underline{U}_{3N} = U_Y\,e^{j120°}$, mit $U_Y = 230\,\mathrm{V}$.

Berechnen Sie die Stöme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$.

Lösung Aus der vorherigen Aufgabe wissen wir, dass sich die Sternpunkte von Quelle und Last auf dem selben Potential befinden, wenn die Last symmetrisch ist. Dies ist hier der Fall.
Es macht also keinen Unterschied, ob die Sternpunkte mit einem Leiter verbunden sind oder nicht, durch den Leiter würde ohnehin kein Strom fließen.
Um uns die Rechnung zu erleichtern, zeichnen wir einen Leiter mit ein:

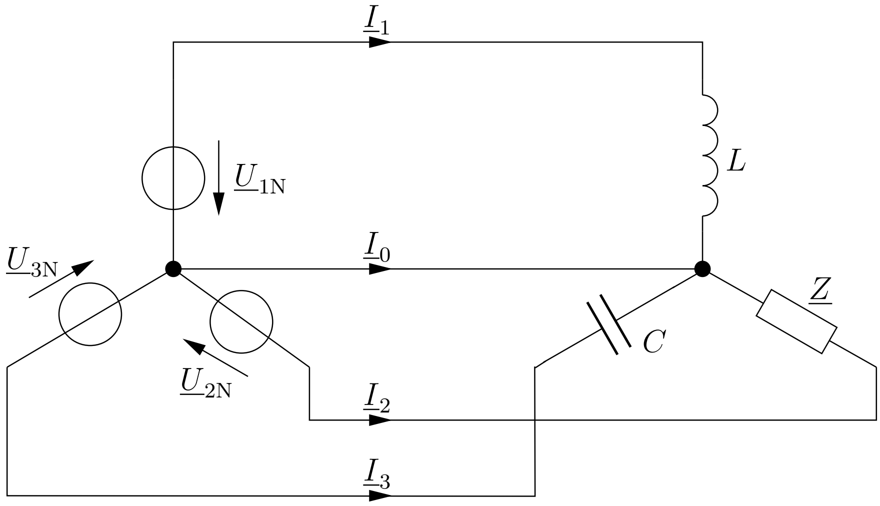


Nun sehen wir, dass sich die Ströme auf sehr einfache Weise berechnen lassen:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1\mathrm{N}}}{R} = \frac{U_\mathrm{Y}}{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}, \\
\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2\mathrm{N}}}{R} = \frac{U_\mathrm{Y}}{R}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}, \\
\underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3\mathrm{N}}}{R} = \frac{U_\mathrm{Y}}{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ}.
\end{aligned}$$

5.8.4. Beispiel 3

Gegeben ist folgende Schaltung:



Die Wechselspannungsquellen bilden ein Drehstrom-Erzeugersystem:
$\underline{U}_{1N} = U_Y \, e^{j0°}, \underline{U}_{2N} = U_Y \, e^{-j120°}, \underline{U}_{3N} = U_Y \, e^{j120°}$, mit $U_Y = 230\,\text{V}$.
Die Werte von L und C sind bekannt.

Dimensionieren Sie $\underline{Z}$ so, dass $\underline{I}_0 = 0$.

Lösung Zunächst berechnen wir die Ströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$:

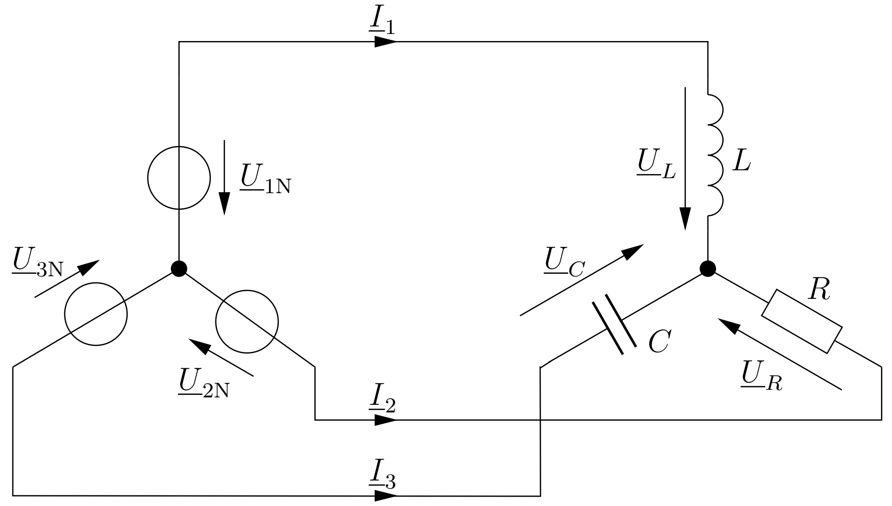
$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1N}}{j\omega L} = \frac{U_Y \, e^{j0°}}{\omega L \, e^{j90°}} = \frac{U_Y}{\omega L} \, e^{-j90°}, \\
\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}} = \frac{U_Y \, e^{-j120°}}{\underline{Z}}, \\
\underline{I}_3 &= \underline{U}_{3N} \cdot j\omega C = U_Y \, e^{j120°} \cdot \omega C \, e^{j90°} = U_Y \omega C \, e^{j210°}.
\end{aligned}$$

Der Knotensatz liefert

$$\begin{aligned}
-\underline{I}_0 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \\
&= 0 \text{ (Forderung der Aufgabenstellung).} \\
\Rightarrow 0 &= \frac{U_\mathrm{Y}}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ} + U_\mathrm{Y}\omega C\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}210^\circ} + \frac{U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}}{\underline{Z}} \\
-\frac{1}{\underline{Z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ} &= \frac{1}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ} + \omega C\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}210^\circ} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ}\frac{1}{\underline{Z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}-120^\circ} &= \frac{1}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ} + \omega C\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}210^\circ} \\
\frac{1}{\underline{Z}} &= \left(\frac{1}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ} + \omega C\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}210^\circ}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}60^\circ} \\
\underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{\omega L}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}150^\circ} + \omega C\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}150^\circ}}.
\end{aligned}$$

5.8.5. Beispiel 4

Gegeben ist folgende Schaltung:



Die Wechselspannungsquellen bilden ein Drehstrom-Erzeugersystem:
$\underline{U}_{1\mathrm{N}} = U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}, \underline{U}_{2\mathrm{N}} = U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}, \underline{U}_{3\mathrm{N}} = U_\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ}$, mit $U_\mathrm{Y} = 230\,\mathrm{V}$.
Die Werte von L, R und C sind bekannt.

Berechnen Sie die Stöme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$, sowie die Spannungen $\underline{U}_L$, $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$.

Lösung Dies ist der komplizierteste Fall einer Drehstromaufgabe. Die Last ist nicht symmetrisch und die Sternpunkte sind nicht miteinander verbunden. Unser Problem hat sechs Unbekannte: $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{U}_L, \underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$. Wir müssen also sechs unabhängige Gleichungen finden, um das Problem lösen zu können.

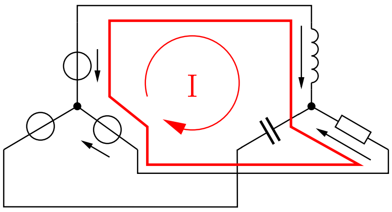
1–3: die Bauelementgleichungen:

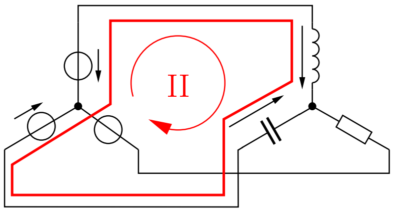
$$\begin{aligned}\underline{U}_L &= \mathrm{j}\omega L \underline{I}_1,\\ \underline{U}_C &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\underline{I}_2,\\ \underline{U}_R &= R\underline{I}_3.\end{aligned}$$

4: der Kirchhoffsche Knotensatz:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0.$$

5–6: der Kirchhoffsche Maschensatz:



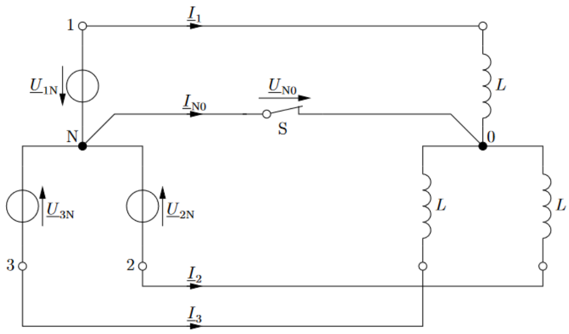


$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_L - \underline{U}_R,\\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_C - \underline{U}_L.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mit}\quad \underline{U}_{12} &= U_\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ},\\ \underline{U}_{31} &= U_\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}150^\circ},\\ U_\Delta &= \sqrt{3}U_\mathrm{Y} = 400\,\mathrm{V}.\end{aligned}$$

Die Aufgabe ist nun durch triviale mathematische Umformungen lösbar. An dieser Stelle wird auf die (zugegebenermaßen längere) Rechnung verzichtet.

Übungsaufgabe: Drehstrom mit symmetischer Last



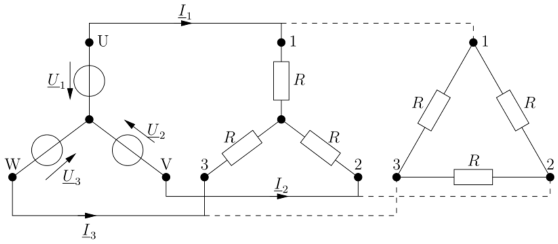
Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aDrehstrom_1.pdf
https://youtu.be/-fX-nkDdhqE

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Übungsaufgabe: Last in Stern- und Dreieckschaltung



Aufgabenblatt

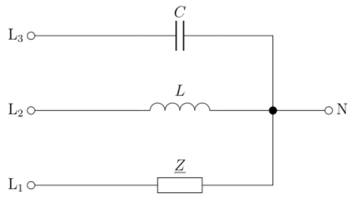
Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a78_1.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=eEsUqguyTuo

Übungsaufgabe: Kein Strom im Neutralleiter bei unsymmetrischer Last!

Die Leiter L_2 und L_3 eines symmetrischen Drehstromnetzes sind mit Blindwiderständen belastet, der Leiter L_1 mit einem unbekannten komplexen Widerstand $\underline{Z}$.

$X_L = X_C = 10\sqrt{3}\,\Omega$



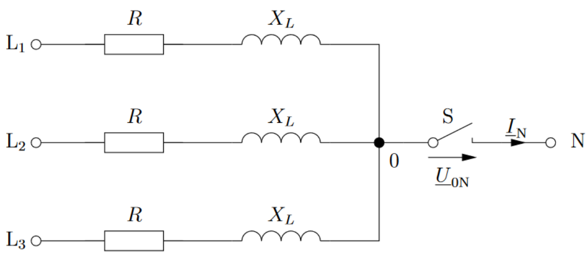
Wie groß müssen Sie den Verbraucher $\underline{Z}$ nach Betrag und Phasenwinkel wählen, damit der Strom im Mittelleiter zu Null wird?

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a78_4.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=e5OhTaP3nG8

Übungsaufgabe: Drehstrom mit unterbrochenem Außenleiter

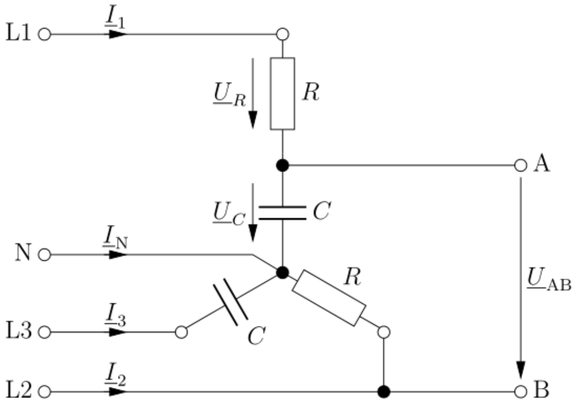


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a78_3.pdf
https://youtu.be/RWSRcljQbRA

Übungsaufgabe: Für echte Kerl*innen!



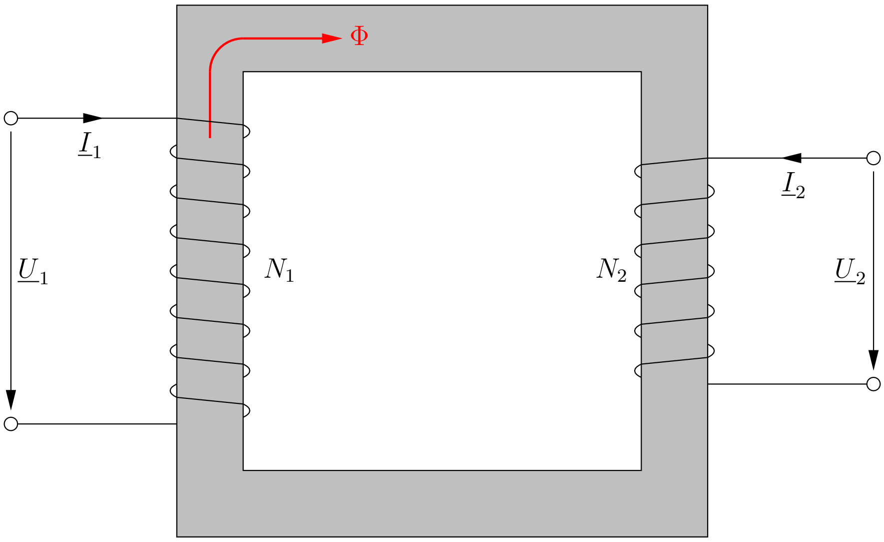
Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a78_5.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=PvS9-0RlZ8U

5.9. Transformator

Ein Transformator (oder kurz Trafo) besteht aus mehreren magnetisch gekoppelten Spulen, welche (in den meisten Fällen) auf einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt sind. Wir betrachten im Folgenden nur den 1-phasigen Transformator, der auf der Primärseite N_1 Windungen besitzt und auf der Sekundärseite N_2 Windungen.



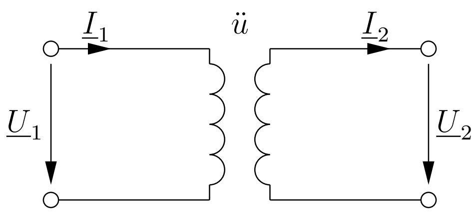
Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Stömen auf der Primär- und Sekundärseite lässt sich über die Betrachtung des magnetischen Kreises berechnen. Da uns an dieser Stelle noch das notwendige Fachwissen fehlt, verzichten wir auf die Herleitung der einzelnen Formeln. Der T-Ersatzschaltbild des Transformators ist auch ohne ein tiefes Verständnis für die inneren Vorgänge recht anschaulich nachzuvollziehen.

5.9.1. Idealer Transformator

Ein idealer Transformator besitzt keine Verluste. Das Verhältnis der Spannung auf Primär- und Sekundärseite wird direkt über das Verhältnis der Windungszahlen bestimmt:

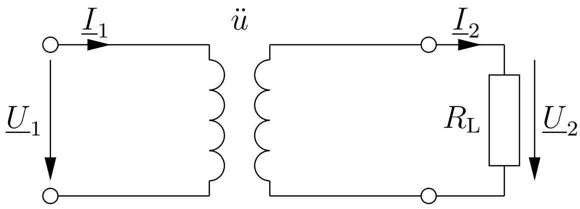
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}.$$

$\ddot{u}$ wird auch Übersetzungsverhältnis genannt.



Ein Transformator wird in den meisten Fällen dazu verwendet, eine Spannung zu ändern. So lassen sich z. B. elektronische Geräte an einer Steckdose betreiben, die nur eine vergleichsweise geringe Spannung benötigen.

Wir schließen nun einen Lastwiderstand an einen idealen Trafo an:



Auf der Primärseite liegt die Spannung U_1 an, es fließt der Strom I_1. Der Trafo nimmt also die Leistung $P = U_1 \cdot I_1$ auf. Da er verlustlos ist, muss diese Leistung im Lastwiderstand R_L umgesetzt werden. Damit lässt sich der sekundärseitige Strom berechnen:

$$\begin{aligned} U_1 \cdot I_1 &= U_2 \cdot I_2 \\ U_1 \cdot I_1 &= \frac{U_1}{\ddot{u}} \cdot I_2 \\ \Rightarrow I_2 &= \ddot{u} \cdot I_1. \end{aligned}$$

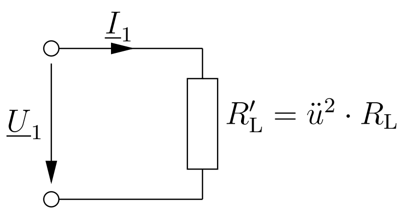
Auf der Sekundärseite wird der Strom I_2 durch die Spannung U_2 und den Lastwiderstand R_L bestimmt. Es gilt

$$R_\mathrm{L} = \frac{U_2}{I_2}.$$

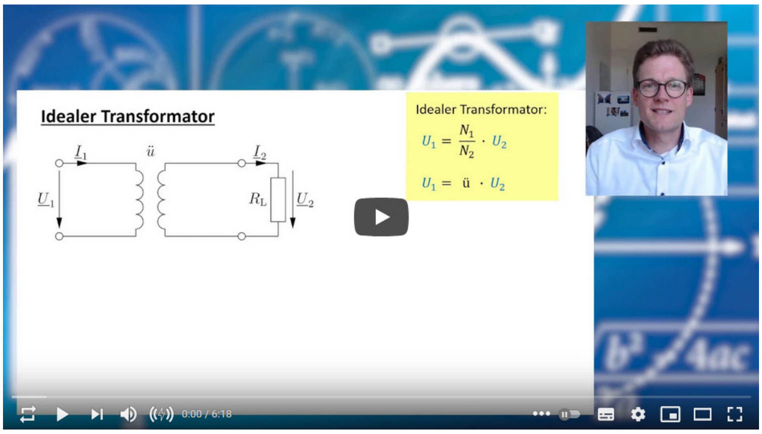
Wir können dies auch über die Primärgrößen ausdrücken:

$$\begin{aligned} R_\mathrm{L} &= \frac{U_1/\ddot{u}}{\ddot{u} \cdot I_1} = \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot \frac{U_1}{I_1} \\ \to \ddot{u}^2 R_\mathrm{L} &= \frac{U_1}{I_1}. \end{aligned}$$

Für die Primärseite „fühlt es sich also so an“, als sei sie direkt mit einem Widerstand $R'_\mathrm{L} = \ddot{u}^2 \cdot R_\mathrm{L}$ verbunden.



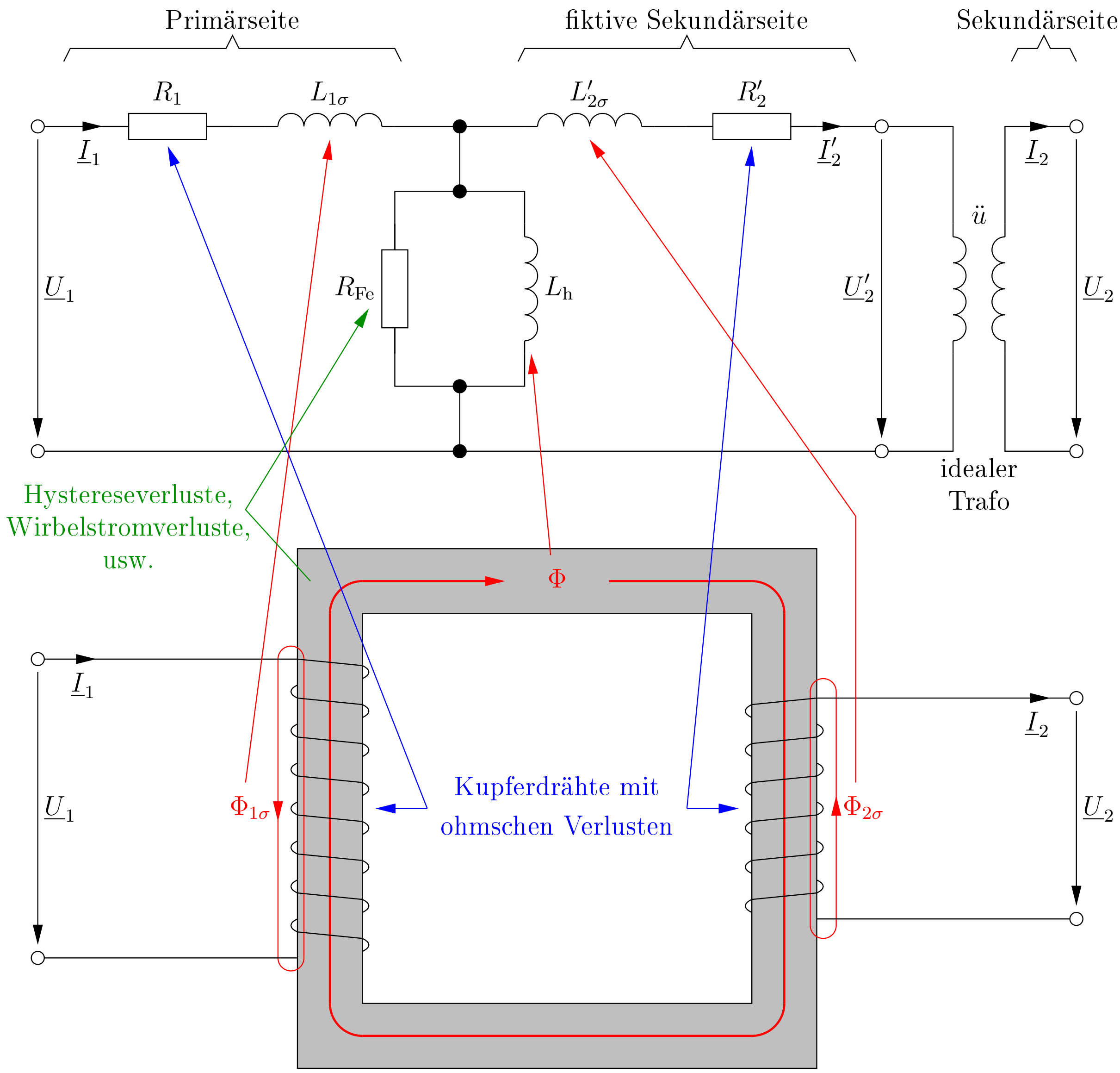
Der ideale Transformator



https://www.youtube.com/watch?v=8pLVp5zQeEM

5.9.2. T-Ersatzschaltbild

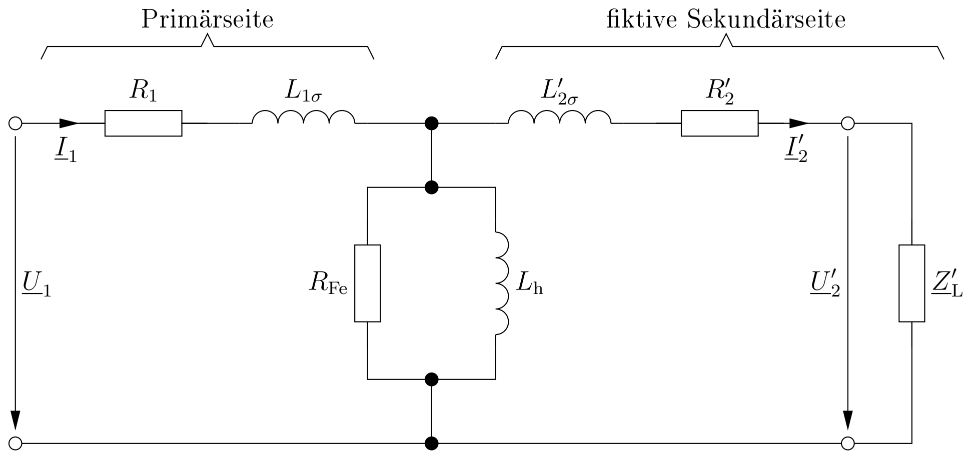
Leider gibt es keine idealen Transformatoren. Die Wickungen auf Primär- und Sekundärseite haben ohmsche Widerstände, zudem breitet sich ein Teil des von ihnen erzeugten magnetischen Flusses nicht im Trafokern, sondern in der Luft aus und trägt nichts zur Energieübertragung bei. Und auch der Kern sorgt für Verluste, denn durch die permanenten Ummagnetisierungen wird er warm. All diese Effekte werdem im T-Ersatzschaltbild berücksichtigt:



Die Ohmschen Widerstände R_1 und R'_2 repräsentieren die Verluste in den Drahtwicklungen (ohmsche Verluste, Stromverdrängung). Der von den Wicklungsströmen verursachte magnetische Fluss Φ wird hauptsächlich im Eisenkern geführt (im Ersatzschaltbild repräsentiert durch L_{h}) und verkoppelt die Stromkreise der Primär- und

Sekundärseite. Ein Teil des Flusses breitet sich jedoch in der Luft aus und trägt nicht zur Kopplung bei, was durch die beiden Streuinduktivitäten $L_{1\sigma}$ und $L'_{2\sigma}$ nachgebildet wird. Auch im Eisenkern treten Verluste auf. Hier sind vorrangig Hysterese- und Wirbelstromverluste zu nennen. Sämtliche Eisenverluste werden im Widerstand R_{Fe} zusammengefasst.

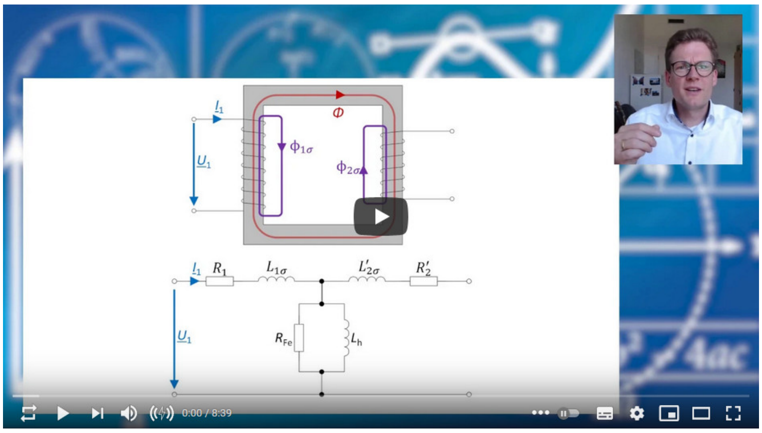
Den idealen Trafo in dem obigen Ersatzschaltbild zeichnet man häufig nicht mit:



Bei den Größen auf der fiktiven Sekundärseite ($L'_{2\sigma}$, R'_2, $\underline{U}'_2$ und $\underline{I}'_2$) handelt es sich um Ersatzgrößen, die es ermöglichen die unterschiedlichen Strom- und Spannungslevel der beiden Transformatorseiten in einem Schaltbild zu betrachten. Zwischen den realen und fiktiven Größen der Sekundärseite bestehen folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
R'_2 &= \ddot{u}^2 \cdot R_2 \\
L'_{2\sigma} &= \ddot{u}^2 \cdot L_{2\sigma} \\
\underline{Z}'_{\mathrm{L}} &= \ddot{u}^2 \cdot \underline{Z}_{\mathrm{L}} \\
\underline{U}'_2 &= \ddot{u} \cdot \underline{U}_2 \\
\underline{I}'_2 &= \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2
\end{aligned}$$

Das T-Ersatzschaltbild



https://www.youtube.com/watch?v=F0jUYryRixo

5.9.3. T-Symmetrie

Die Querschnitte der Drähte, die man für die Trafowicklungen benutzt, müssen für den dort fließenden Strom ausgelegt sein. Ein Trafo, der die Spannung herunter transformiert, besitzt primärseitig viele dünne Windungen und sekundärseitig wenige dicke. Bei einem sinnvoll dimensionierten Trafo liegt die sogenannte T-Symmetrie von:

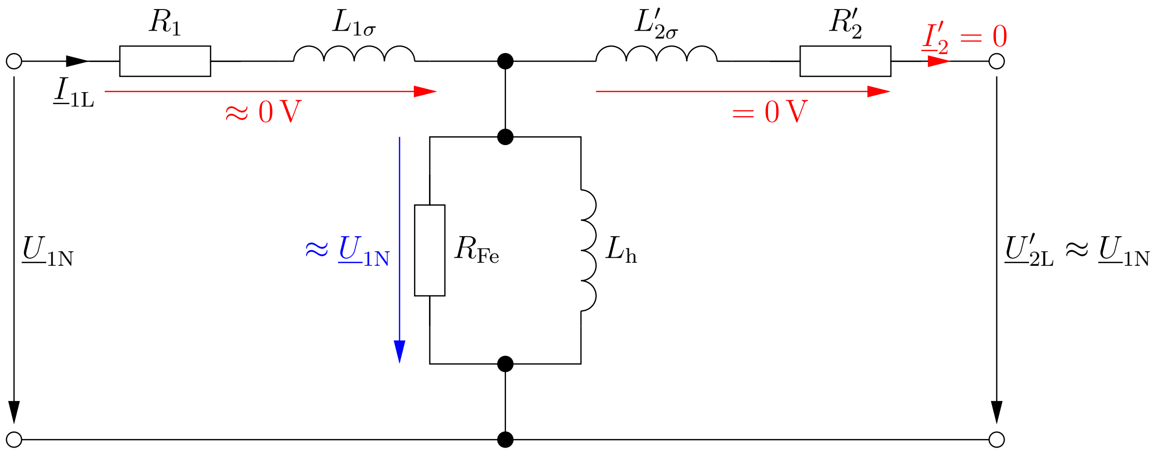
$$\begin{aligned} R_1 &= R'_2 \\ L_{1\sigma} &= L'_{2\sigma} \end{aligned}$$

5.9.4. Vermessen eines realen Trafos

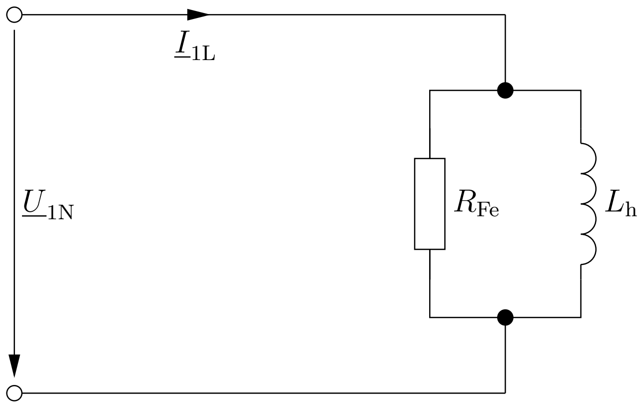
Die sechs Elemente des T-Ersatzschaltbildes lassen mit Hilfe zweier einfacher Messungen bestimmen.

Leerlauf-Versuch

Bei dem Leerlaufversuch wird der Trafo auf der Primärseite mit seiner Nennspannung $\underline{U}_{1\mathrm{N}}$ betrieben, auf der Sekundärseite läuft er leer (es ist also sekundärseitig nichts angeschlossen).



Für die weitere Betrachtung muss man sich darüber im klaren sein, dass $R_1 \ll R_{Fe}$ (die Wicklungsverluste sind gegenüber der Eisenverluste vernachlässigbar) und $L_{1\sigma} \ll L_h$ (die Streuinduktivität ist gegenüber der Hauptinduktivität vernachlässigbar). Dies bewirkt, dass im Ersatzschaltbild nahezu die gesamte Spannung $\underline{U}_{1N}$ an R_{Fe} und L_h abfällt.
Übrig bleibt das Leerlauf-Ersatzschaltbild (LL-ESB):



In der Praxis kann man nun U_{1N} und I_{1L} (also die Beträge) messen und benötigt eine weitere Größe. Entweder misst man die im Transformator umgesetzte Wirkleistung P_L, oder den Phasenverschiebungswinkel φ_L zwischen U_{1N} und I_{1L}.

1. Durch Messung der Wirkleistung P berechnen sich die Bauelemente wie folgt:

$$\begin{aligned} P_\mathrm{L} &= \frac{U_\mathrm{1N}^2}{R_\mathrm{Fe}} \\ \rightarrow R_\mathrm{Fe} &= \frac{U_\mathrm{1N}^2}{P_\mathrm{L}} \\ Q_\mathrm{L} &= \sqrt{S_\mathrm{L}^2 - P_\mathrm{L}^2} \\ &= \sqrt{(U_\mathrm{1N} \cdot I_\mathrm{1L})^2 - P_\mathrm{L}^2} \\ \omega L_\mathrm{h} &= \frac{U_\mathrm{1N}^2}{Q_\mathrm{L}} \\ \rightarrow L_\mathrm{h} &= \frac{U_\mathrm{1N}^2}{\omega Q_\mathrm{L}} \end{aligned}$$

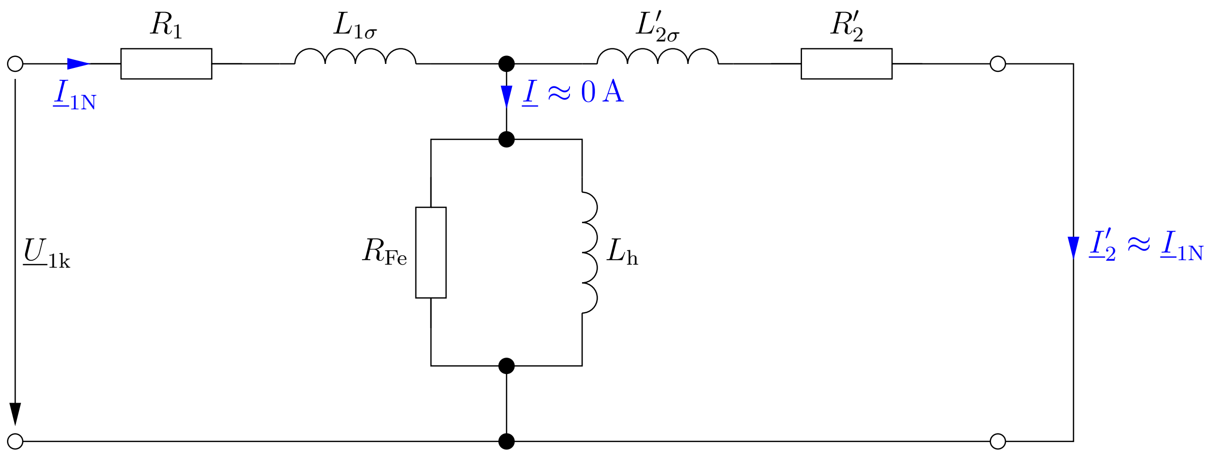
2. Bei Kenntnis des Phasenverschiebungswinkels φ_L lassen sich Wirk- und Blindleistung wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P_\mathrm{L} &= U_\mathrm{1N} \cdot I_\mathrm{1L} \cdot \cos(\varphi_\mathrm{L}), \\ Q_\mathrm{h} &= U_\mathrm{1N} \cdot I_\mathrm{1L} \cdot \sin(\varphi_\mathrm{L}). \end{aligned}$$

   Die Bauelemente berechnen sich hieraus wie oben gezeigt.

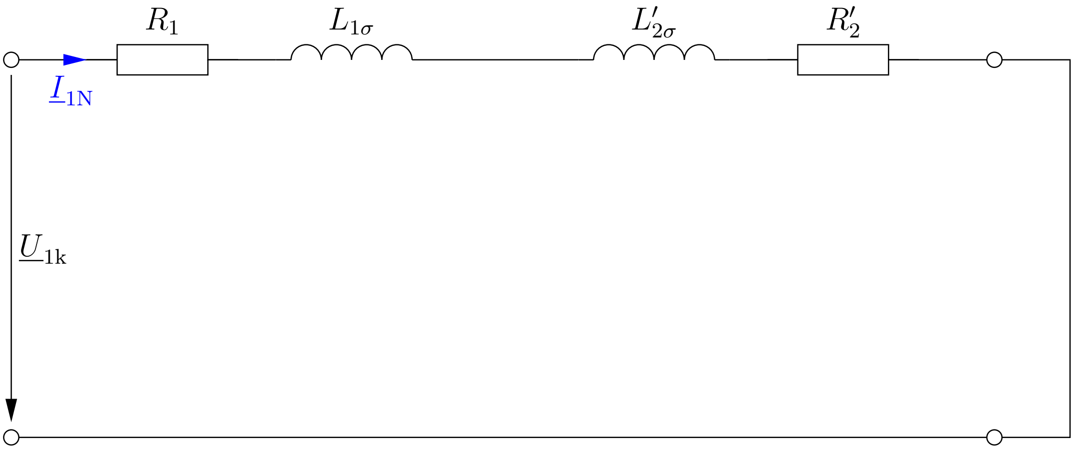
Kurzschluss-Versuch

Als zweites führt man den Kurzschlussversuch durch. Hierbei wird die Sekundärseite des Trafos kurzgeschlossen. Es wäre jetzt eine doofe Idee, primärseitig Nennspannung anzulegen! Stattdessen wird die primärseitige Spannung langsam erhöht, bis der Nennstrom fließt (was schon bei sehr kleinen Spannungen passiert!). Der Strom im Ersatzschaltbild wird nun nahezu komplett durch die Längsimpedanzen fließen, denn es gilt ja $R_1 \ll R_\mathrm{Fe}$ und $L_{1\sigma} \ll L_\mathrm{h}$.

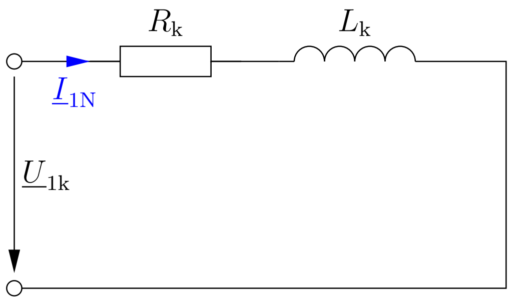


Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.


Dadurch erhalten wir das Kurzschluss-Ersatzschaltbild (KS-ESB):



Da wir von T-symmetrischen Trafos ausgehen ($R_1 = R'_2$, $L_{1\sigma} = L'_{2\sigma}$) können wir das KS-ESB weiter vereinfachen:



Hierbei ist

$$
\begin{aligned}
R_k &= R_1 + R'_2 &&= 2R_1, \\
L_k &= L_{1\sigma} + L'_{2\sigma} &&= 2L_{1\sigma},
\end{aligned}
$$

Wieder messen wir U_{1k} und I_{1N}, sowie die Wirkleistung P_k oder den Phasenverschiebungswinkel φ_k.

1. Bei Messung der Wirkleistung P_k berechnen sich die Bauelemente wie folgt:

$$
\begin{aligned}
P_k &= I_{1N}^2 \cdot R_k \\
\rightarrow R_k &= \frac{P_k}{I_{1N}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_k &= \sqrt{S_k^2 - P_k^2} \\
&= \sqrt{(U_{1k} \cdot I_{1N})^2 - P_k^2}
\end{aligned}
$$

$$
L_k = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{Q_k}{I_{1N}^2}
$$

2. Bei Kenntnis des Phasenverschiebungswinkels φ berechnen sich die Bauelemente wie folgt:

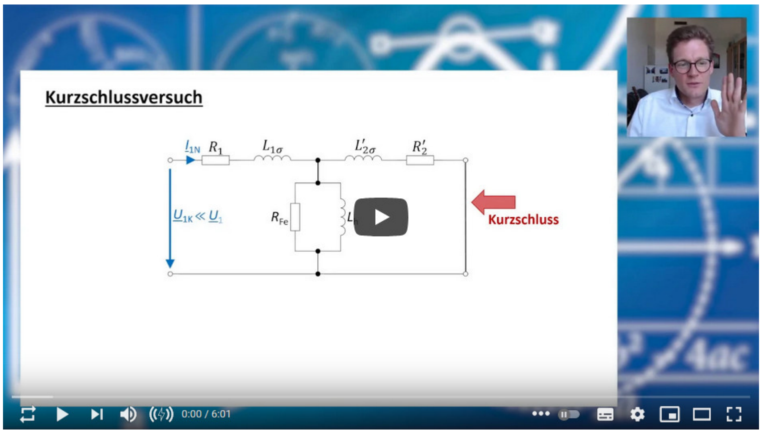
$$\begin{aligned} R_\mathrm{k} &= \frac{U_\mathrm{1k}}{I_\mathrm{1N}} \cdot \cos(\varphi_\mathrm{k}), \\ L_\mathrm{k} &= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{U_\mathrm{1k}}{I_\mathrm{1N}} \cdot \sin(\varphi_\mathrm{k}). \end{aligned}$$

Abschließend lassen sich nun die Elemente des Erstzschaltbildes, sowie der sekundärseitige Wicklungswiderstand R_2 und die sekundärseitige Streuinduktivität $L_{2\sigma}$ berechnen:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_\mathrm{k}}{2}, \\ R_2' &= \frac{R_\mathrm{k}}{2}, \\ R_2 &= \frac{R_2'}{\ddot{u}^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{1\sigma} &= \frac{L_\mathrm{k}}{2}, \\ L_{2\sigma}' &= \frac{L_\mathrm{k}}{2}, \\ L_{2\sigma} &= \frac{L_{2\sigma}'}{\ddot{u}^2}. \end{aligned}$$

Leerlauf- und Kurzschlussversuch



https://www.youtube.com/watch?v=_h-wOEMORys

Trainingsaufgaben: Transformator

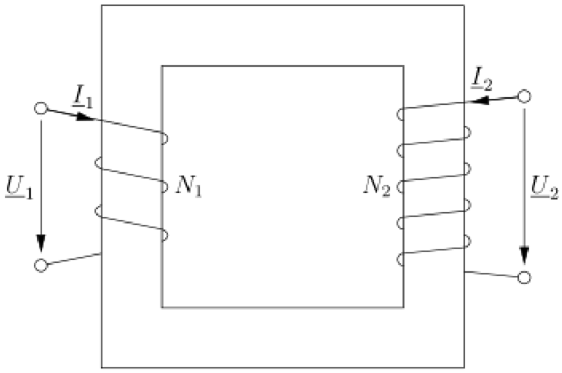
An einem T-Symmetrischen Transformator führen Sie den Leerlauf- und den Kurzschlussversuch durch.

Die im Leerlauf gemessene Wirkleistungsaufnahme kann vernachlässigt werden.

Zeichnen Sie das T-Ersatzschaltbild dieses Transformators.

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Transformator.pdf

Übungsaufgabe: T-Ersatzschaltbild vereinfachen



Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aTrafo_1.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=3LDH-idOmoY

Übungsaufgabe: Transformator-Aufgabe, einfach und typisch

Gegeben ist ein T-symmetrischer Transformator mit dem Wicklungsverhältnis $\ddot{u}$. Die Streufelder an der Primär- und Sekundärspule sind so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Es wurden bereits der Leerlauf- und der Kurzschlussversuch durchgeführt.

Beim Leerlaufversuch stellte sich nach Anlegen der primärseitigen Nennspannung U_{1N} der Strom I_{1L} ein. Ein Wirkleistungsmessgerät zeigte, dass während des Leerlaufversuchs nahezu keine Wirkleistung im Transformator umgesetzt wurde.

Beim Kurzschlussversuch stellte sich der primärseitige Nennstrom I_{1N} ein, wofür die Spannung U_{1k} angelegt werden musste.

1. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild dieses Transformators.
2. Bestimmen Sie anhand der oben geschilderten Messungen alle Bauelemente des verwendeten Ersatzschaltbildes.
3. Wie groß ist der ohmsche Wicklungswiderstand R_2 der Sekundärwicklung?

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aTrafo_2.pdf
https://youtu.be/Wt7VH10fd7E

Übungsaufgabe: T-Ersatzschaltbild berechnen

Bei einer Leerlauf- und Kurzschlussmessung an einem Transformator ergaben sich die folgenden Messwerte:
$U_{10} = 230\,\text{V}$, $U_{1\text{K}} = 60\,\text{V}$,
$U_{20} = 18\,\text{V}$, $I_{1\text{K}} = 22{,}9\,\text{mA}$,
$I_{10} = 11\,\text{mA}$, $I_{2\text{K}} = 280\,\text{mA}$,
$P_{10} = 1{,}06\,\text{W}$, $P_{1\text{K}} = 1{,}37\,\text{W}$,
$f = 50\,\text{Hz}$.
Berechnen Sie aus diesen Daten:

1. die Wicklungsübersetzung $\ddot{u}$,
2. die relative Kurzschlussspannung u_K,
3. den Wirk- und Blindanteil der Längsimpedanz, die sich aus den Kupferverlustwiderständen und den Streuinduktivitäten zusammensetzt – bezogen auf die Eingangsseite,
4. den Wirk- und Blindanteil des Magnetisierungszweigs – bezogen auf die Eingangsseite.

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a82_6.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=0myBiDD0kU0

Übungsaufgabe: T-ESB gegeben – Messwerte berechnen

Von einem T-symmetrischen Transformator sind folgende Daten bekannt:
$U_1 = 230\,\text{V}$; $f = 50\,\text{Hz}$; $I_2 = 0{,}3\,\text{A}$; $R_1 = 1{,}2\,\text{k}\Omega$; $L_{1\sigma} = 0{,}477\,\text{H}$;
$R_\text{Fe} = 48\,\text{k}\Omega$; $\ddot{u}$=11,8.

1. Berechnen Sie
   (a) die relative Kurzschlussspannung u_K des Transformators,
   (b) die Leerlaufverluste P_0,
   (c) die beim Kurzschlussversuch in den Wicklungen des Transformators in Wärme umgesetzte Leistung P_K.
2. Bei Leerlauf hat die magnetische Flussdichte im Eisen den Scheitelwert $\hat{B} = 1{,}6\,\text{T}$ bei einem Eisenquerschnitt $A = 4\,\text{cm}^2$. Welche Windungszahl N_1 hat somit die Eingangswicklung?

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a82_7.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=AdVWw_Ks2aw

Übungsaufgabe: T-Ersatzschaltbild und Phasenverschiebung berechnen

Zur Bestimmung der Elemente der Ersatzschaltung eines T-symmetrischen Transformators mit der Wicklungsübersetzung $\ddot{u} = 6$ wurde eine Leerlauf und eine Kurzschlussmessung mit folgenden Ergebnissen durchgeführt:
Leerlaufversuch: $U_{10} = 230\,\text{V}$; $f = 50\,\text{Hz}$; $I_{10} = 1\,\text{A}$; $P_{10} \approx 0\,\text{W}$.
Kurzschlussversuch: $U_{1\text{K}} = 40\,\text{V}$; $f = 50\,\text{Hz}$; $I_{1\text{K}} = 5\,\text{A}$; $P_{1\text{K}} = 50\,\text{W}$.

1. Aus dem Leerlaufversuch können Sie den Ersatzwiderstand für die Eisenverluste R_Fe und die Hauptinduktivität L_h bestimmen. Wie groß sind R_Fe und X_h?
2. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild dieses Transformators.
3. Berechnen Sie die Elemente des Ersatzschaltbildes.
4. Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Eingangsspannung $\underline{U}_{1\text{K}}$ und Ausgangsstrom $\underline{I}_{2\text{K}}$ beim oben erwähnten Kurzschlussversuch?

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a82_8.pdf
https://youtu.be/NDfqGOhIJJg

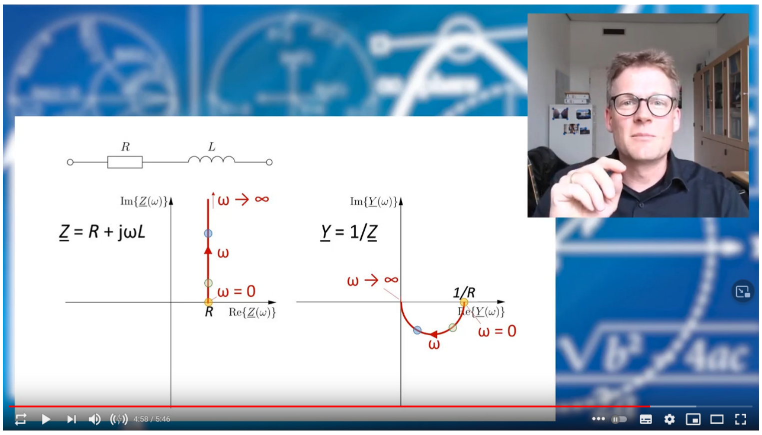
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

6. Grafische Verfahren

6.1. Ortskurven

Eine Ortskurve stellt den Verlauf einer komplexen Größe, die von einem reellen Parameter abhängt, in der komplexen Ebene dar. In der Elektrotechnik kann man zum Beispiel die Impedanz (den komplexen Widerstand) einer Schaltung in Abhängigkeit von der (Kreis-) Frequenz darstellen.

Ortskurven – Was ist das?



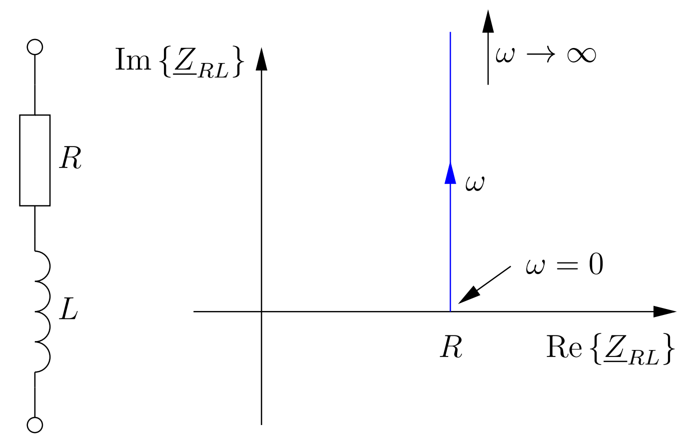
https://www.youtube.com/watch?v=29YjQAuJxdk

6.1.1. Erstes Beispiel: Impedanz- und Admittanzortskurve einer *RL*-Schaltung

Gegeben ist die Reihenschaltung aus einem Widerstand und einer Spule. Die Gesamtimpedanz ist

$$\underline{Z}_{RL} = R + \mathrm{j}\omega L.$$

Betrachten wir nun die Kreisfrequenz ω als Variable, so kann die Impedanz alle Werte annehmen, die auf der folgenden Geraden liegen:



Der Realteil besitzt unabhängig von ω den konstanten Wert R. Für $\omega = 0$ ist der Imaginärteil Null und wird linear mit wachsendem ω größer.

Wie sieht nun aber die Ortskurve der Admittanz (also des komplexwertigen Leitwerts) aus? Hierfür müssen uns zwei Dinge klar sein:

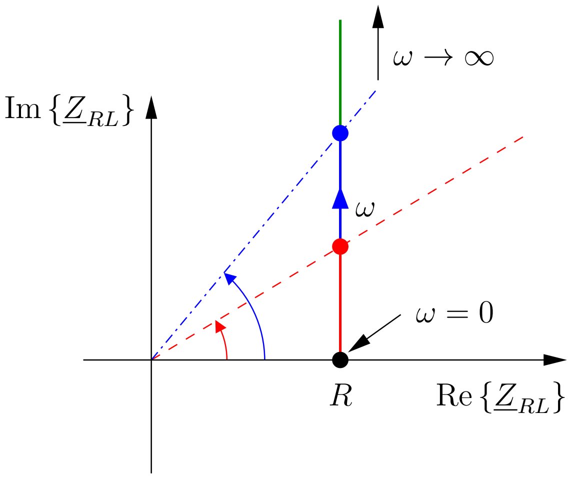
- Die Admittanz ist der Kehrwert (oder die Inverse) der Impedanz.

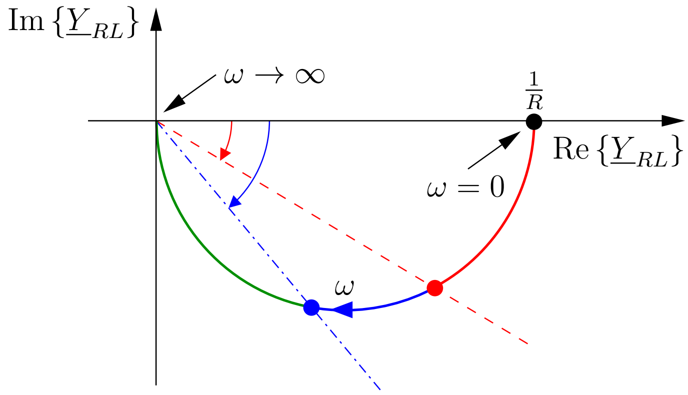
- Jeder einzelne Punkt der Impedanzortskurve entspricht der komplexen Impedanz (also einer komplexen Zahl) bei einer bestimmten Kreisfrequenz. Die Admittanz dieses Punktes ist der Kehrwert der komplexen Zahl.

Zur Erinnerung: Den Kehrwert einer komplexen Zahl erhält man, indem man den Kehrwert des Betrags nimmt und das Vorzeichen des Winkels ändert (siehe Seite 26).

In der folgenden Grafik ist links noch einmal die Ortskurve der Impedanz gezeichnet. Drei Punkte auf der Ortskurve wurden zur besseren Übersicht farbig markiert, ebenso einzelne Abschnitte. Wir beginnen bei dem schwarzen Punkt. Hier ist der Wert der Impedanz rein reell $\underline{Z}(\omega = 0) = R$, entsprechend ist $\underline{Y}(\omega = 0) = 1/R$. Mit steigender Kreisfrequenz wird der Betrag der Impedanz immer größer, was bedeutet, dass der Betrag der Admittanz stetig abnimmt. Für unendlich große Kreisfrequenzen gilt $|\underline{Z}(\omega \to \infty)| = \infty$ und entsprechend $|\underline{Y}(\omega \to \infty)| = 0$.

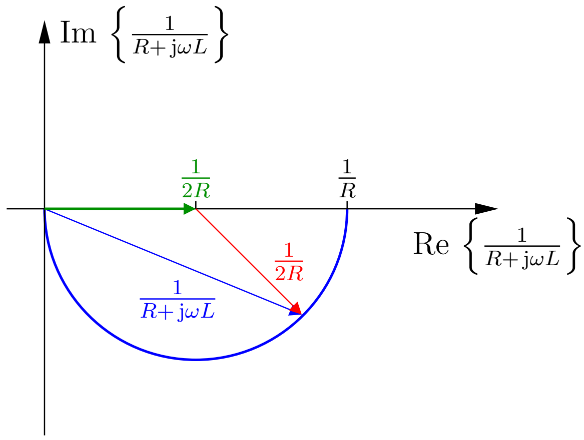
Gleichzeitig betrachten wir die Winkel der Ortskurven. In der Impedanzebene starten wir bei $\varphi = 0$ und laufen nach $\varphi = 90°$. Entsprechend müssen wir in der Admittanzebene den Winkelbereich $0°$ bis $-90°$ durchschreiten.





6.1.2. Das wird wirklich ein Kreis?!

Die Ausführung oben ist hoffentlich nachvollziehbar. Im Folgenden wird gezeigt, dass es sich bei der Admittanz-Ortskurve tatsächlich um einen perfekten Halbkreis handelt.



Wenn die Ortskurve wirklich einen perfekten Halbkreis beschreibt, muss jeder Punkt einen konstanten Abstand zum Mittelpunkt besitzen:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}-\frac{1}{2R}\right| &= \frac{1}{2R}\\
\left|\frac{R-\mathrm{j}\omega L}{R^2+\omega^2L^2}-\frac{1}{2R}\right| &= \frac{1}{2R}\\
\left|\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}-\frac{1}{2R}-\mathrm{j}\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right| &= \frac{1}{2R}\\
\sqrt{\left(\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}-\frac{1}{2R}\right)^2+\left(\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2} &= \frac{1}{2R}\\
\sqrt{\frac{R^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}-2\frac{R}{(R^2+\omega^2L^2)\cdot 2R}+\frac{1}{(2R)^2}+\frac{(\omega L)^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}} &= \frac{1}{2R}\\
\sqrt{\frac{R^2+\omega^2L^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}-\frac{1}{(R^2+\omega^2L^2)}+\frac{1}{(2R)^2}} &= \frac{1}{2R}\\
\sqrt{\frac{1}{(R^2+\omega^2L^2)}-\frac{1}{(R^2+\omega^2L^2)}+\frac{1}{(2R)^2}} &= \frac{1}{2R}\\
\sqrt{\frac{1}{(2R)^2}} &= \frac{1}{2R}\\
\frac{1}{2R} &= \frac{1}{2R} \qquad \text{w.z.z.w.}
\end{aligned}
$$

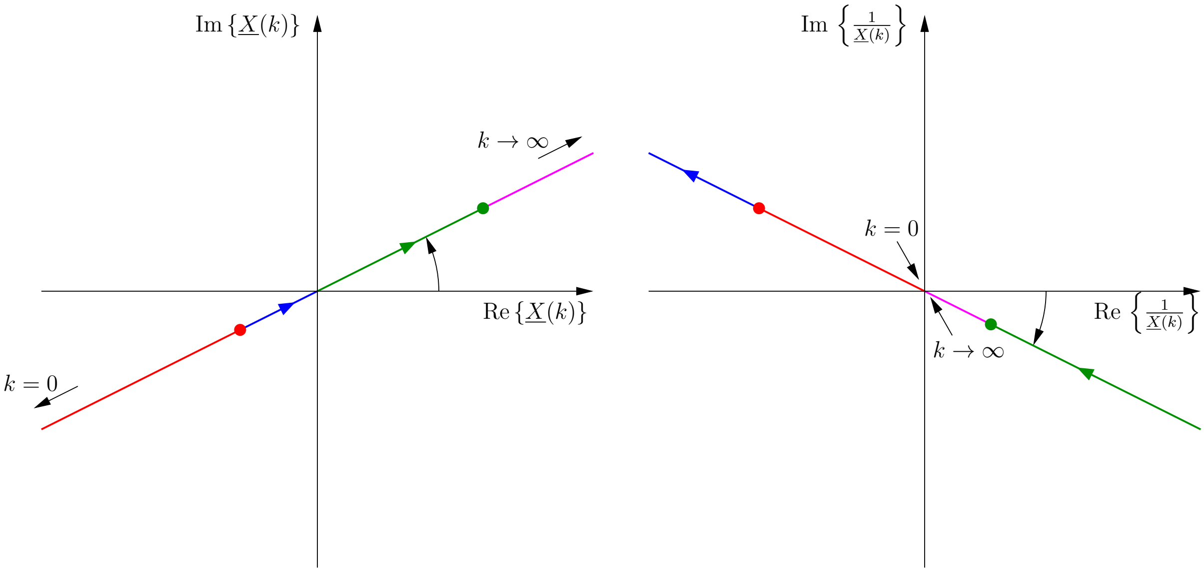
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

6.1.3. Inversionsregeln

Bei der schrittweisen Konstruktion kommt es oft vor, dass wir die Inverse einer Ortskurve bilden müssen. (Beim vorangehenden Beispiel kamen wir über die Impedanz- zur Admittanzortskurve.) Es gibt drei grundlegende Inversionsregeln, die uns die Konstruktion erleichtern.

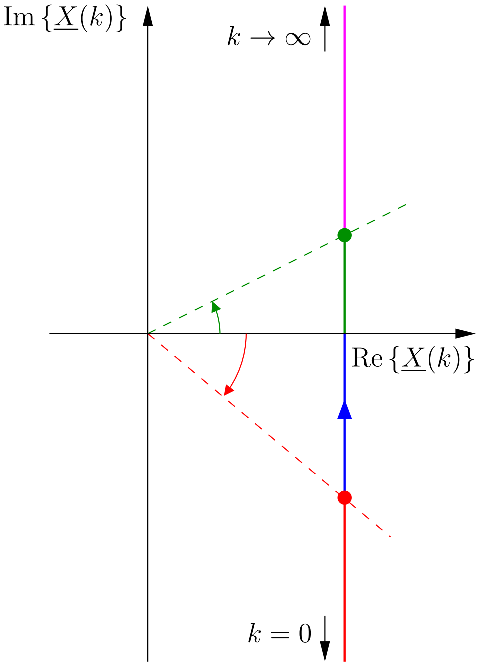
1. Regel: Inversion einer Geraden durch den Ursprung

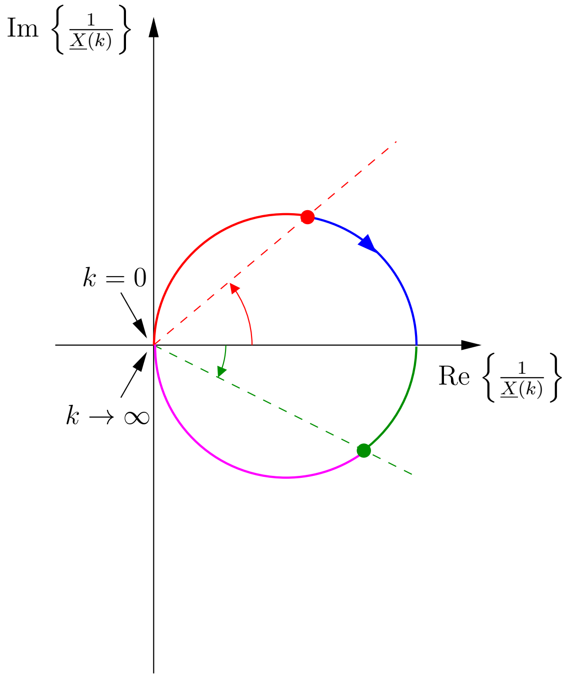
„Die Inversion einer Geraden durch den Ursprung ergibt eine Gerade durch den Ursprung.“



2. Regel: Inversion einer allgemeinen Geraden

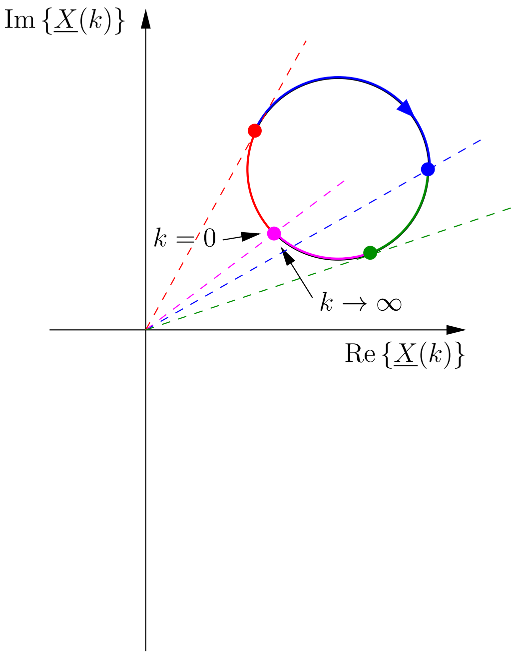
„Die Inversion einer allgemeinen Geraden ergibt einen Kreis durch den Ursprung.“

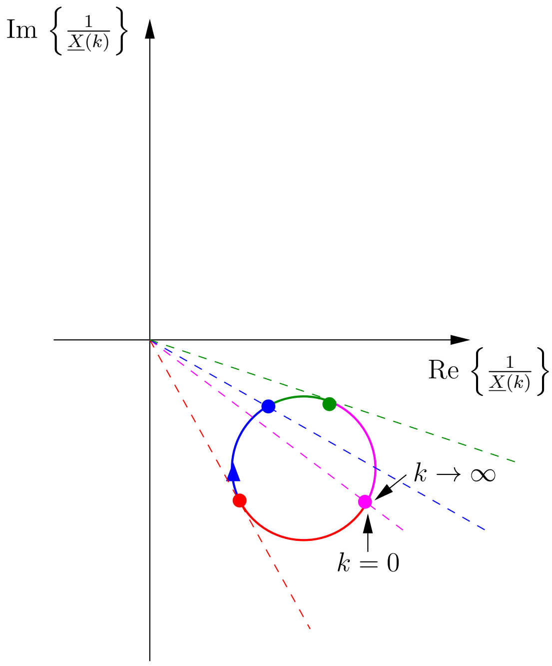




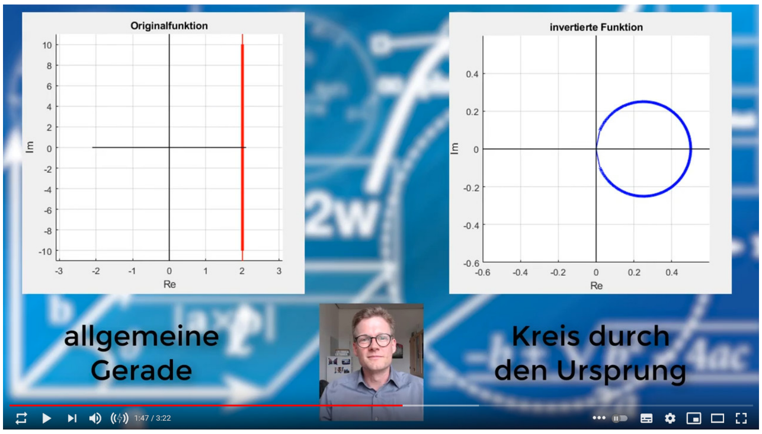
3. Regel: Inversion eines allgemeinen Kreises

„Die Inversion eines allgemeinen Kreises ergibt einen allgemenen Kreis.“



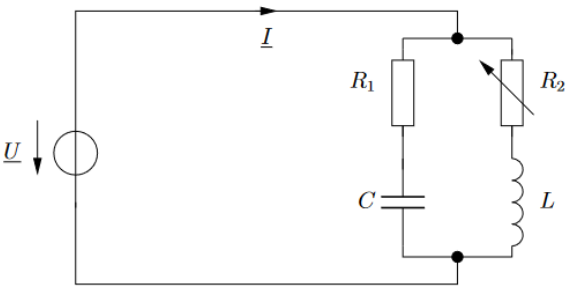


Ortskurven – Inversionsregeln



https://www.youtube.com/watch?v=bcnSzU4l8X8

Übungsaufgabe: Admittanzortskurve $\underline{Y}(R)$ zeichnen



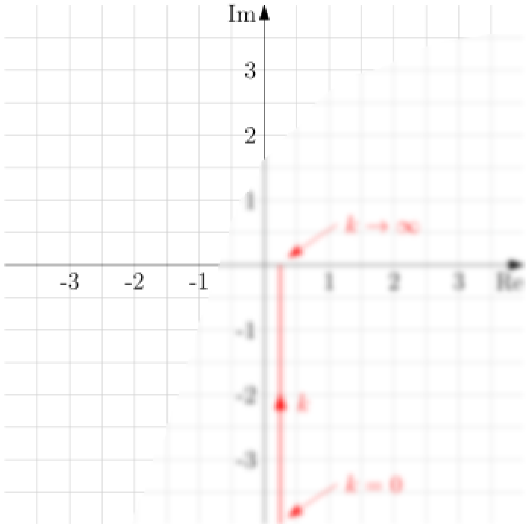
Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aOrtskurve_02.pdf
https://youtu.be/_rlRqGuWrvo

Trainingsaufgaben: Ortskurven invertieren

Gegeben ist die Ortskurve der komplexen Funktion $\underline{F}(k)$.



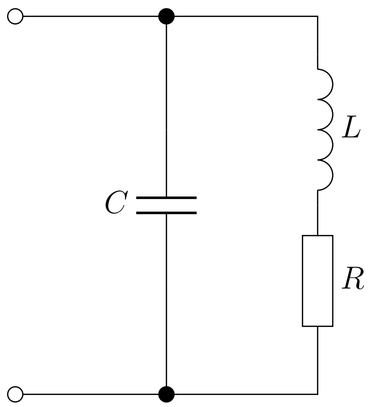
Invertieren Sie die Ortskurve ([illegible]).

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Ortskurven.pdf

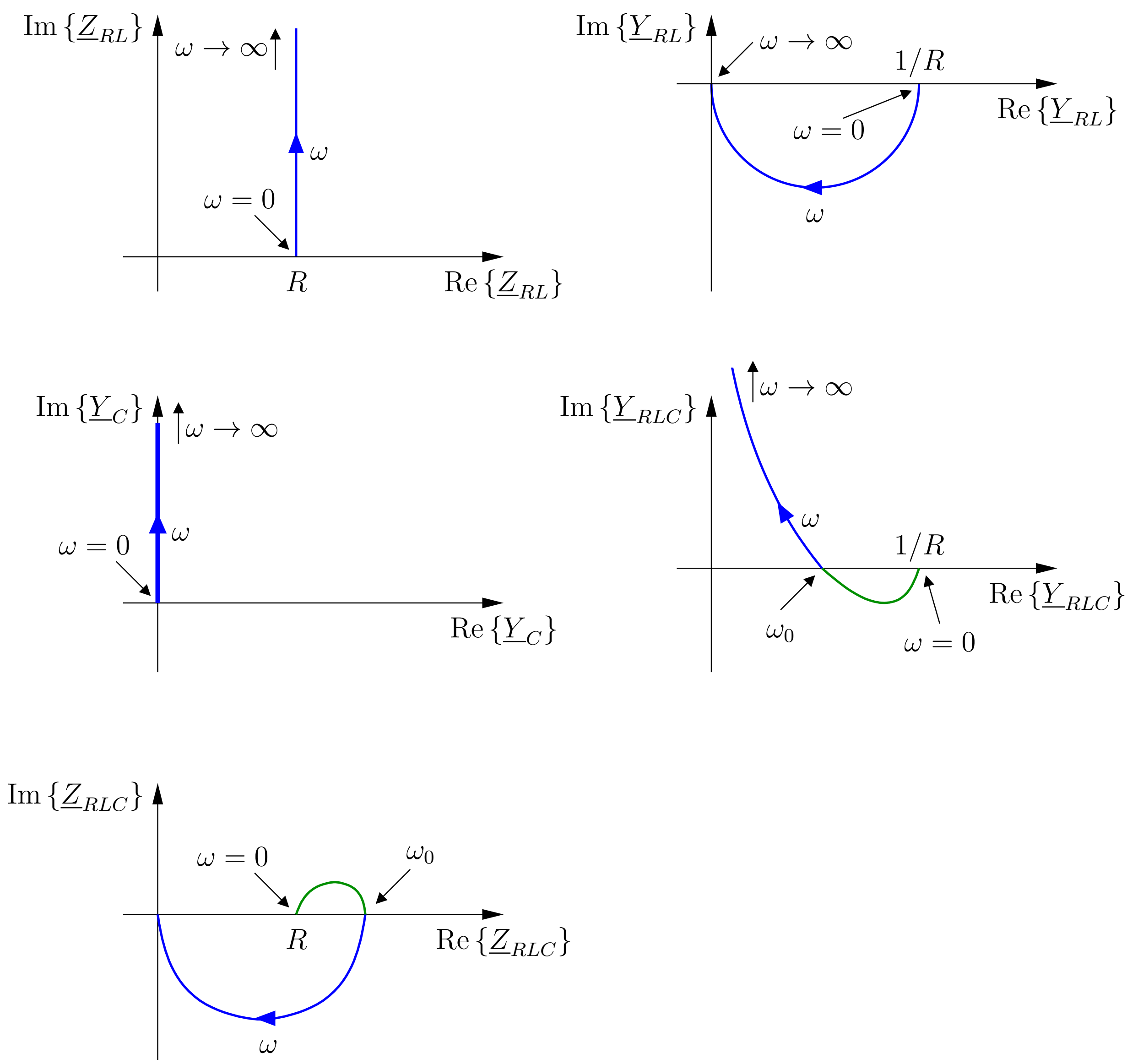
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

6.1.4. Beispiel: Ortskurve einer resonanten Schaltung

Zur Veranschaulichung betrachten wir die folgende Schaltung. Da sie sowohl eine Induktivität als auch eine Kapazität beinhaltet, wird sie resonantes Verhalten aufweisen. Jedoch handelt es sich weder um einen reinen Reihen- noch um einen reinen Parallelschwingkreis. Ohne mühsame Rechnung möchten wir herausfinden, wie groß die Impedanz bei Resonanz ist. Wir wissen, dass die Impedanz bei Resonanz rein reell ist. Aber ist sie größer als, gleich oder kleiner als R?



Wir lösen die Frage ganz ohne Rechnung mit Hilfe der Ortskurvenkonstruktion. Die nachfolgende Grafik beinhaltet alle Zwischenschritte.



Wir sehen also, dass die Impedanz der Schaltung bei Resonanz größer ist als R.

Die notwendigen Gedankenschritte zu den einzelnen Teilbildern sind diese:

1. Wir beginnen bei der Reihenschaltung von R und L. Da die Bauelelemente in Reihe geschaltet sind, zeichnen wir die Impedanzortskurve in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω. (Die Gesamtimpedanz bei einer Reihenschaltung ist die Summe der Einzelimpedanzen.) $\underline{Z}_{RL} = R + \mathrm{j}\omega L$. Der Realteil ist also konstant R und unabhängig von ω, der Imaginärteil steigt mit zunehmendem ω.

2. Die RL-Schaltung liegt parallel zu C. Bei einer Parallelschaltung erhält man den Gesamtleitwert, indem man die Einzelleitwerte addiert. Wir müssen also die Ortskurve von $\underline{Z}_{RL}$ invertieren, um $\underline{Y}_{RL}$ zu erhalten. Wir wenden die 2. Inversionsregel an: Aus der Halbgeraden wird ein Halbkreis durch den Ursprung. Da

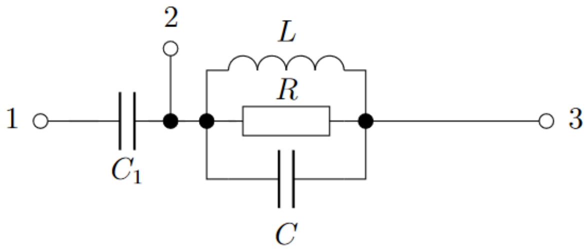
$\underline{Z}_{RL}(\omega = 0) = R$ ist, muss dieser Punkt auf $\underline{Y}_{RL}(\omega = 0) = 1/R$ abgebildet werden. Der Betrag der Impedanzortskurve strebt für $\underline{Z}_{RL}(\omega \to \infty)$ gegen unendlich, es muss also gelten $|\underline{Y}_{RL}(\omega \to \infty)| = 0$. Die Impedanzortskurve deckt den Winkelbereich $0° \leq \varphi \leq 90°$ ab, darum muss die Admittanzortskurve $0° \geq \varphi \geq -90°$ abdecken.

3. Die Admittanz der Kapazität beträgt $\underline{Y}_C = \mathrm{j}\omega C$, ist also rein Imaginär mit $|\underline{Y}_C(\omega = 0)| = 0$ und $|\underline{Y}_C(\omega \to \infty)| \to \infty$.

4. Nun addieren wir die Ortskurven $\underline{Y}_{RL}(\omega)$ und $\underline{Y}_C(\omega)$ miteinander. Hierfür rufen wir uns in Erinnerung, dass jeder einzelne Punkt der Ortskurven den Wert der jeweiligen Admittanz bei einer bestimmten Kreisfrequenz repräsentiert.
   - Für $\omega = 0$ addieren wir die Punkte $(1/R + \mathrm{j}0)$ und $(0 + \mathrm{j}0)$. Es gilt also $\underline{Y}_{RLC}(\omega = 0) = 1/R$.
   - Bei größer werdendem ω liefert $\underline{Y}_{RL}$ einen negativen Beitrag zum Imaginärteil, $\underline{Y}_C$ einen positiven. Da die Schaltung eine Resonanzfrequenz aufweisen soll, benötigen wir einen Schnittpunkt mit der reellen Achse. (Dort ist der Imaginärteil Null, was die Bedingung für die Resonanz ist.) Die Ortskurve $\underline{Y}_{RLC}$ weist also zunächst einen negativen Imaginärteil auf, bei wachsendem ω dominiert jedoch $\underline{Y}_C$ und der Imaginärteil von $\underline{Y}_{RLC}$ strebt schließlich auch gegen Unendlich.
   - Der Realteil von $\underline{Y}_{RLC}$ wird allein von $\underline{Y}_{RL}$ bestimmt, beginnt also bei $1/R$ und strebt gegen Null.

5. Da wir die Impedanzortskurve $\underline{Z}_{RLC}$ suchen, müssen wir abschließend die Admittanzortskurve $\underline{Y}_{RLC}$ invertieren.
   - Da der Startpunkt auf der reellen Achse liegt, ist seine Inversion einfach. $\underline{Y}_{RLC}(\omega = 0) = 1/R$, also ist $\underline{Z}_{RLC}(\omega = 0) = R$.
   - Mit wachsendem ω durchschreitet $\underline{Y}_{RLC}$ zunächst den grün gezeichneten Bereich. Hier ist der Phasenwinkel aller Punkte kleiner oder gleich Null. Zudem nimmt der Betrag (also der Abstand von Koordinatenursprung zum jeweiligen Punkt) mit wachsendem ω ab.
     Für $\underline{Z}_{RLC}$ muss im grün gezeichneten Bereich also gelten, dass die Phasenwinkel aller Punkte positiv oder Null sein müssen und der Betrag mit wachsendem ω zunimmt.
   - In den Schnittpunkten der Ortskurven mit der jeweiligen reellen Achse liegt die Resonanzfrequenz der Schaltung.
   - In dem blau gezeichneten Abschnitt von $\underline{Y}_{RLC}$ überstreicht der Phasenwinkel den Bereich $0° \leq \varphi \leq 90°$, der Betrag nimmt stetig zu und strebt schließlich gegen Unendlich.
     Für $\underline{Z}_{RLC}$ muss also gelten, dass der Winkelbereich $0° \geq \varphi \geq -90°$ ist und der Betrag gegen Null strebt.

Übungsaufgabe: Impedanzortskurve $\underline{Z}(\omega)$ zeichnen

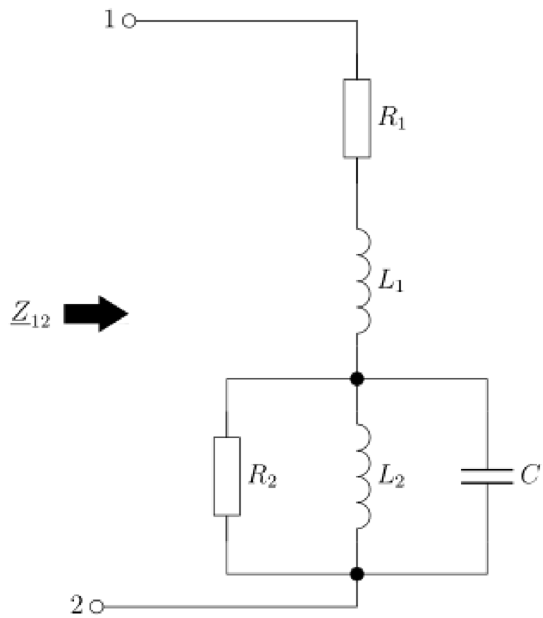


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aOrtskurve_01.pdf
https://youtu.be/W5llZbnCzd4

Übungsaufgabe: Ortskurve $\underline{Z}(\omega)$ konstruieren



Aufgabenblatt

Lösungsvideo

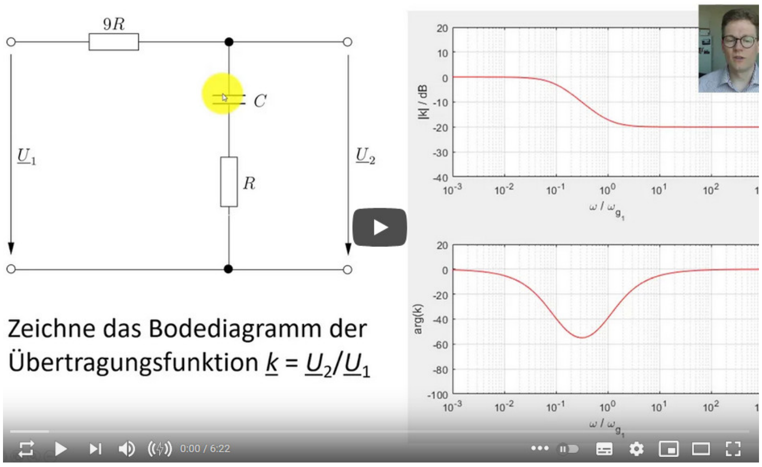
http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a91_10.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=pkRxjsMiup0

6.2. Bodediagramme

Der schriftliche Teil zu Bodediagrammen steht noch aus, aber die Youtube-Videos sind schon fertig.

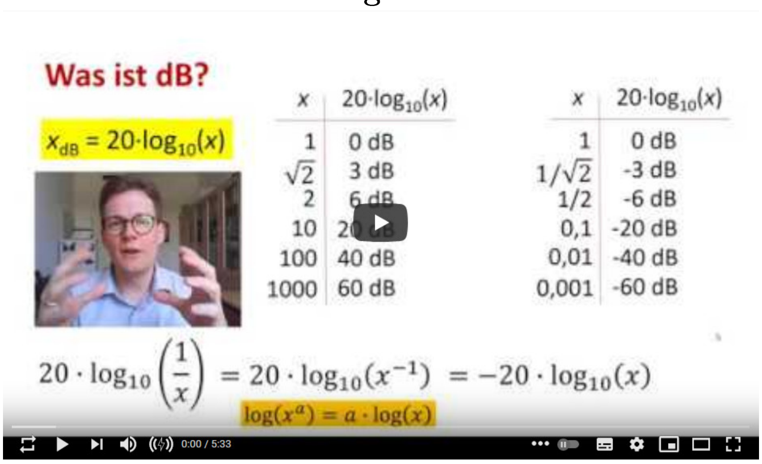
Eine Übersicht von Bodediagrammen verschiedener grundlegender Funktionen finden Sie im Anhang A.3.

Teil 1 – Was ist ein Bodediagramm?



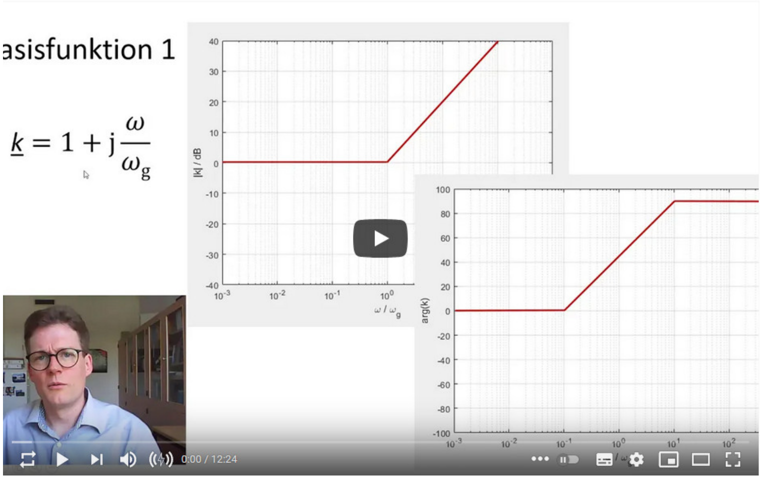
https://www.youtube.com/watch?v=bvPHEc6-XtY

Teil 2 – Was ist der Pegel in dB?



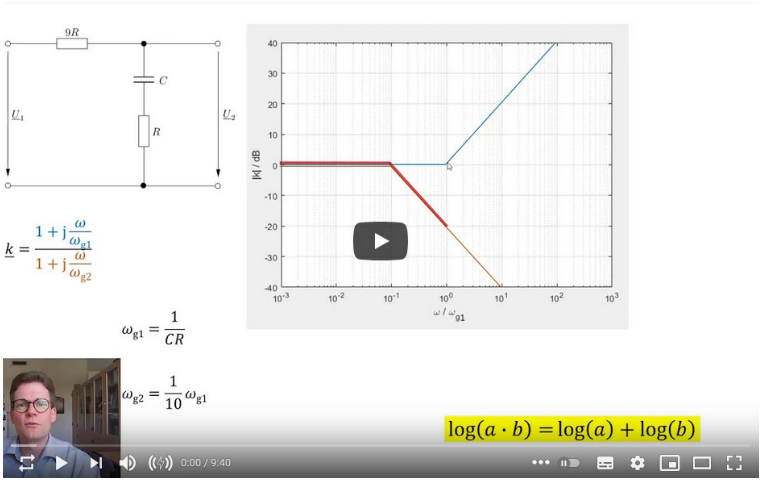
https://www.youtube.com/watch?v=J9iw3Ck3s2g

Teil 3 – Bodediagramme einfacher Funktionen zeichnen



https://www.youtube.com/watch?v=iLLTdMA5aM0

Teil 4 – Bodediagramm einer Schaltung zeichnen

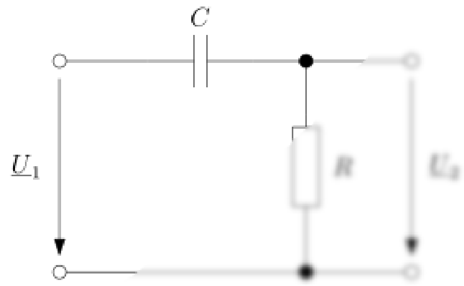


https://www.youtube.com/watch?v=e1rbnofNi_Q

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Trainingsaufgaben: Bodediagramme

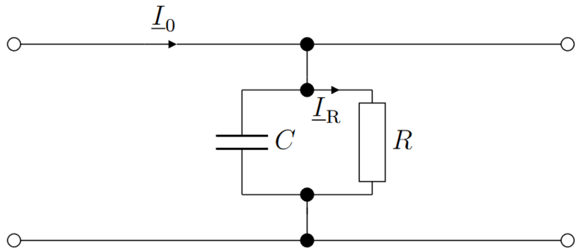
Gegeben ist eine Hochpassfilterschaltung.



1. Stellen Sie die Übertra
2. Normieren Sie $\underline{k}$
3. Welchen

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Bodediagramm.pdf

Übungsaufgabe: Bodediagramm, einfach

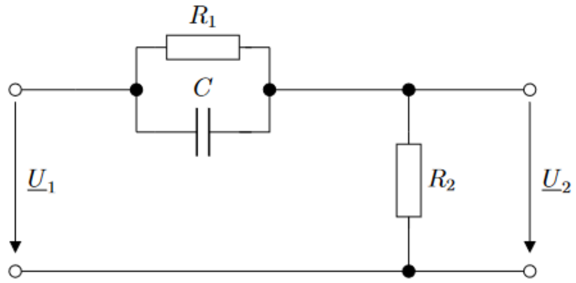


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a93_1.pdf
https://youtu.be/GEvq56hxX98

Übungsaufgabe: Bodediagramm zeichnen

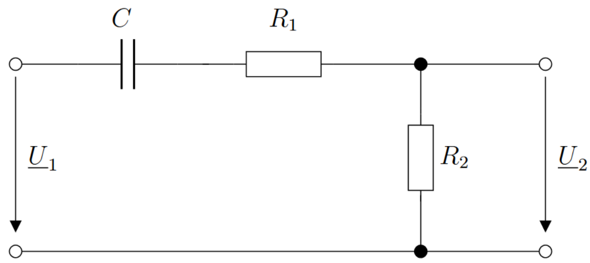


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a93_3.pdf
https://youtu.be/1eIl1PO_eJs

Übungsaufgabe: Bodediagramm einer Übertragungsfunktion

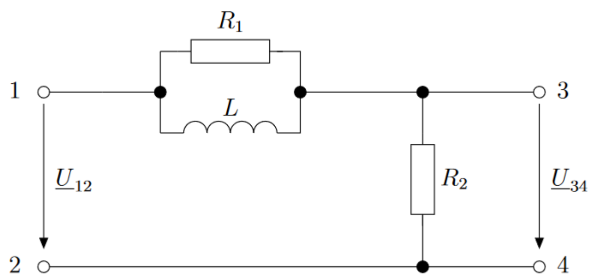


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a93_4.pdf
https://youtu.be/g0k3c46wiG0

Übungsaufgabe: Bodediagramm



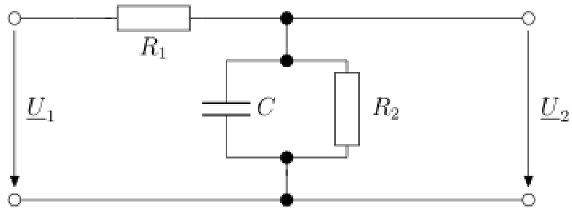
Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a93_5.pdf
https://youtu.be/Jr2LQdZIr70

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Übungsaufgabe: Vom Bodediagramm zu Ortskurve



Aufgabenblatt

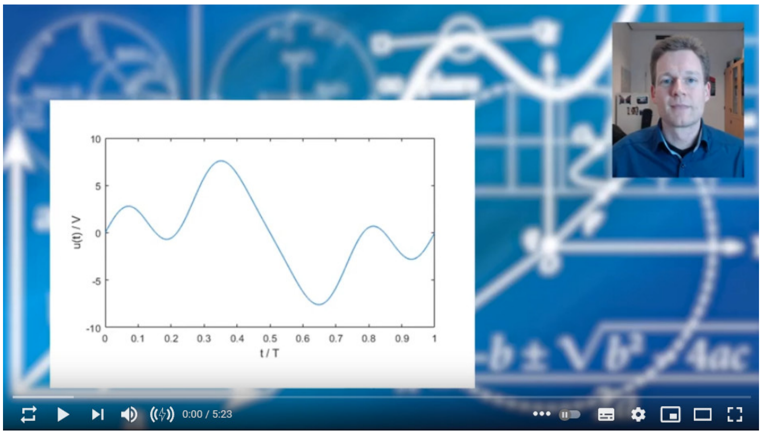
Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a93_2.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=DfJ8TlSFp28

7. Fourierreihe

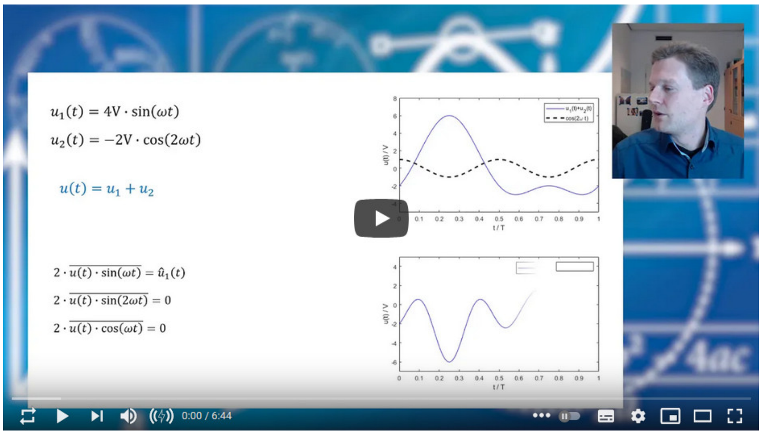
Dieses Kapitel existiert noch nicht, aber es gibt Youtube-Videos.

Teil 1: Überlagerte Sinusschwingungen



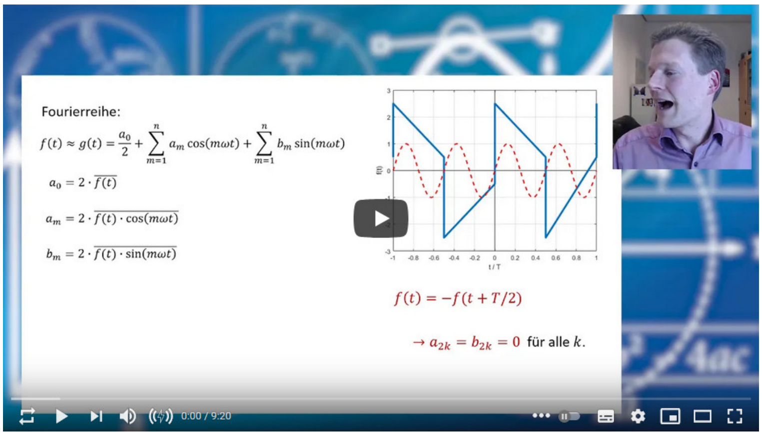
https://www.youtube.com/watch?v=dyx1Jr819r4

Teil 2: Überlagerte Sinus- und Cosinusschwingungen



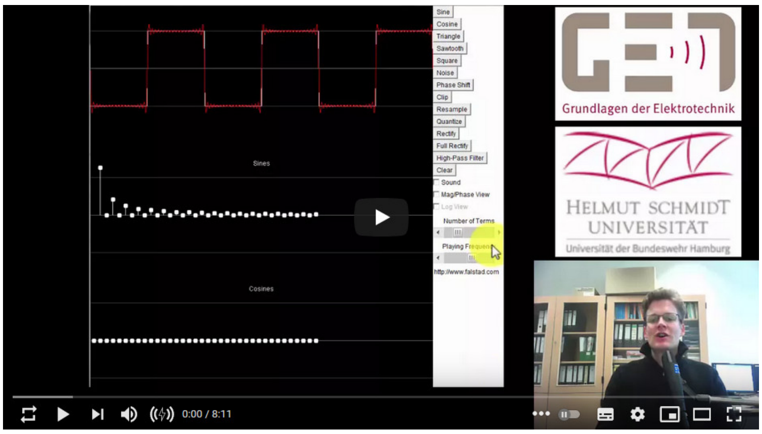
https://www.youtube.com/watch?v=Y4qUXfgOwkY

Teil 3: Symmetrieeigenschaften



https://www.youtube.com/watch?v=fjRrKeVhTeg

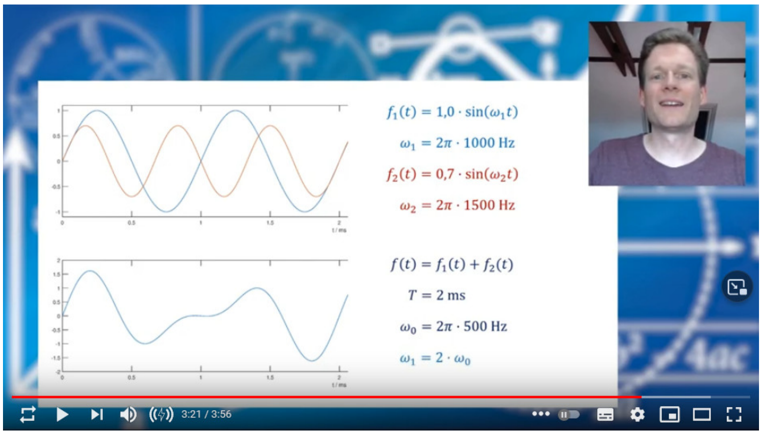
Fourierreihe – anschauliche Erklärung



https://www.youtube.com/watch?v=Wy_N0bLNWNE

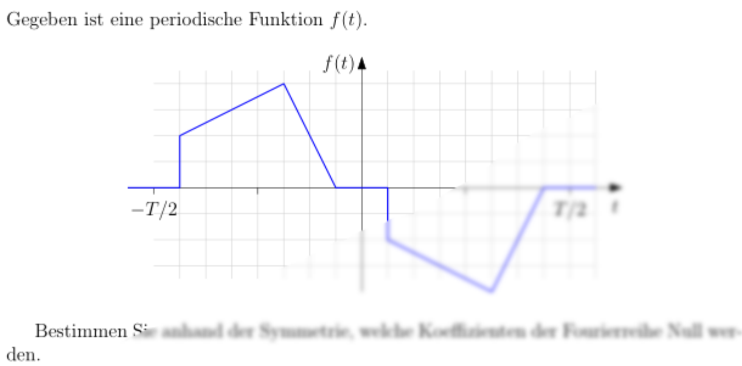
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Fourierreihe – Was ist die Grundfrequenz?



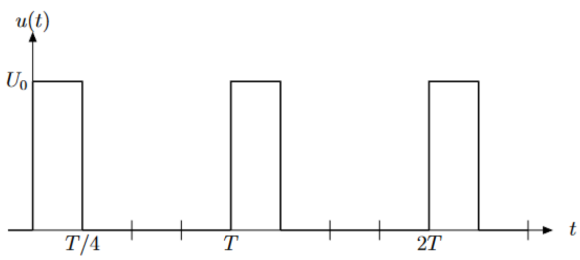
https://www.youtube.com/watch?v=44OwMF5bmYk

Trainingsaufgaben: Fourierreihe



http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Fourierreihe.pdf

Übungsaufgabe: Fourierreihe, einfach

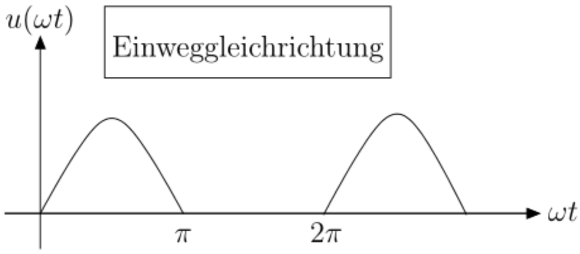


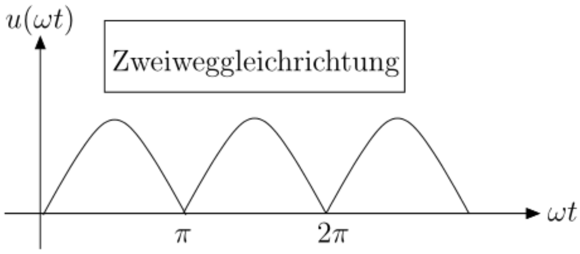
Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a111_2.pdf
https://youtu.be/heTxvVs8Dmo

Übungsaufgabe: Einweg- und Zweiweggleichrichter



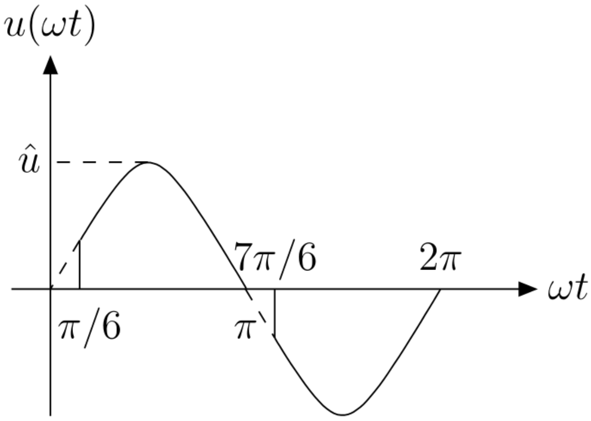


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a111_1.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=k9eKpLxqNSw

Übungsaufgabe: Phasenanschnittssteuerung



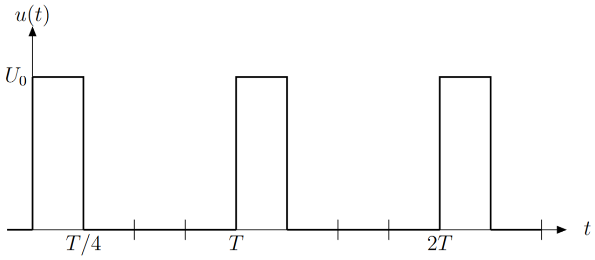
Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a111_5.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=KQej5WjUNLA

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Übungsaufgabe: Fourierreihe, Betrag und Phase der Grundschwingung

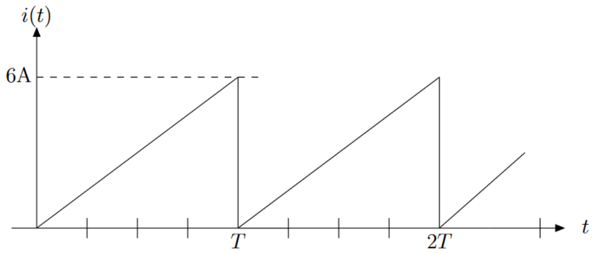


Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a111_3.pdf
https://youtu.be/txWMVH_cAVk

Übungsaufgabe: Fourierreihe, Leistung der Grundschwingung



Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a111_4.pdf
https://youtu.be/FrMfAou1Xms

8. Laplacetransformation

8.1. Anwendung der Laplacetransformation

Einschwingvorgänge lassen sich, wie zuvor gezeigt, mit Hilfe von Differentialgleichungen (DGL) berechnen. Jedoch erhöht jedes energiespeichernde passive Bauelement (L bzw. C) die Ordnung der DGL. Bereits eine DGL zweiter Ordnung (die also auch die 2. Ableitung enthält) ist mühsam zu lösen. Gibt es in der betrachteten Schaltung außerdem Quellen, die zeitabhängige Spannungen oder Ströme abgeben, führt dies zu einer inhomogenen DGL.

Wendet man das mathematische Werkzeug der Laplace-Transformation an, lassen sich auch komplizierte Einschwingvorgänge mit geringem Aufwand berechnen. Im Folgenden wird das Vorgehen *kochrezeptartig* beschrieben. Ich verzichte auf jede Herleitung oder Erläuterung der mathematischen Zusammenhänge.

Bei der Laplacetransformation handelt es sich um eine *rechtsseitige Funktion*. Dies bedeutet, dass sie nur für $t \geq 0$ Gültigkeit besitzt. Darum legen wir den Moment der Änderung in der Schaltung (Einschalten, Schalter umlegen, o.Ä.) immer auf den Zeitpunkt $t = 0$.

8.1.1. Schritt 1: Umzeichnen der Schaltung in den Bildbereich

Die zu analysierende Schaltung wird im ersten Schritt in den sogenannten Bildbereich überführt. Hierfür ersetzen wir jedes Bauelement durch das jeweilige Pendant. In Abb. 8.1 sind die passiven Bauelente im Zeit- und Bildbereich gegenübergestellt. Im Bildbereich werden bei L und C auch die Anfangsbedingungen berücksichtigt. Da an L der Strom stetig ist und an C die Spannung, erhalten wir $i_L(t = 0)$ und $u_C(t = 0)$, indem wir die Schaltung im Zeitbereich für $t < 0$ betrachten.

Die Quellen werden in den Bildbereich transformiert, indem man die Zeitfunktion ihrer Ausgangsspannung bzw. ihres Ausgangsstroms laplacetransformiert, siehe Abb. 8.2. Eine Reihe wichtiger Korrespondenzen finden Sie in Tabelle 8.1. (Die Transformierte einer Konstanten ist $a \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s}$. Darum wird aus einer Gleichspannungsquelle im Bildbereich $U \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{U}{s}$ und aus einer Gleichstromquelle $I \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{I}{s}$.)

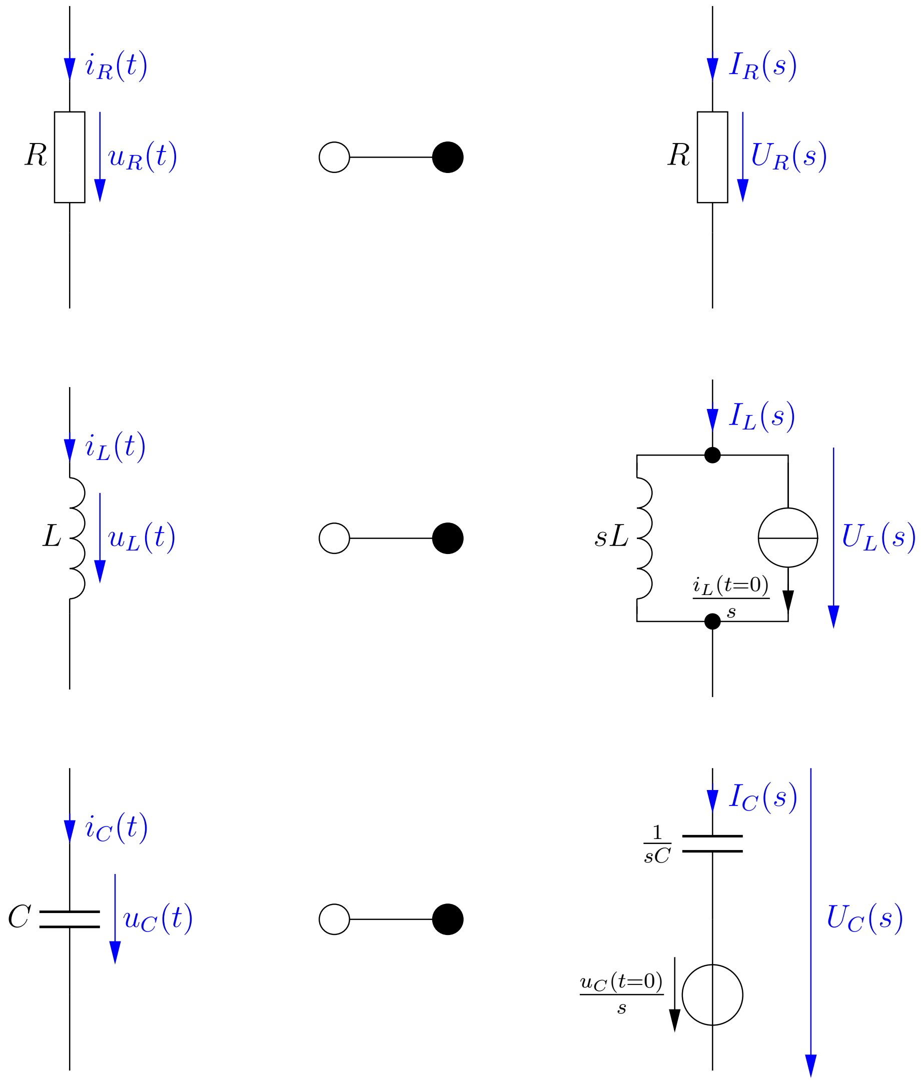


Abbildung 8.1.: Transformation der passiven Bauelemente in den Bildbereich

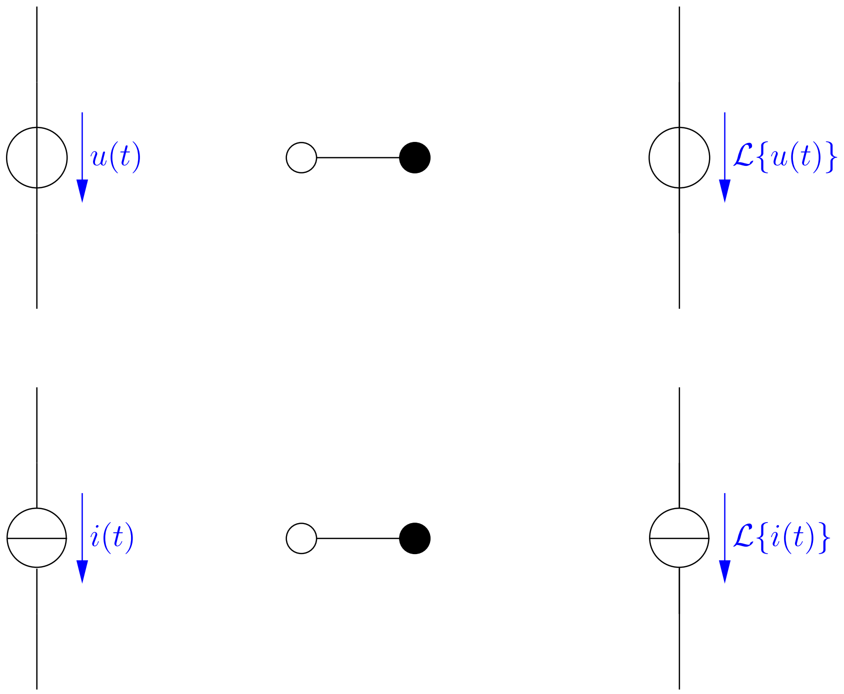


Abbildung 8.2.: Transformation der aktiven Bauelemente in den Bildbereich

8.1.2. Schritt 2: Berechnung der gesuchten Größe im Bildbereich

Die gesuchte Größe (meist ein Strom oder eine Spannung) kann nun im Bildbereich berechnet werden.

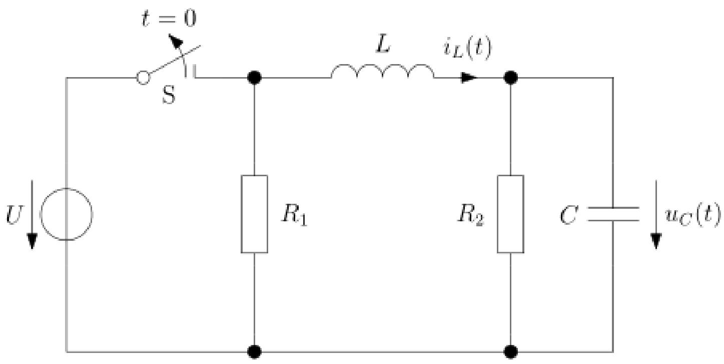
8.1.3. Schritt 3: Rüchtransformation in den Zeitbereich

Nachdem Sie die gesuchte Größe im Bildbereich gefunden haben, können Sie die Gleichung zurück in den Zeitbereich transformieren. Nutzen Sie die Tabelle 8.1.

Einschaltvorgänge mit Laplacetransformation berechnen

https://www.youtube.com/watch?v=NTgjMtieNC4

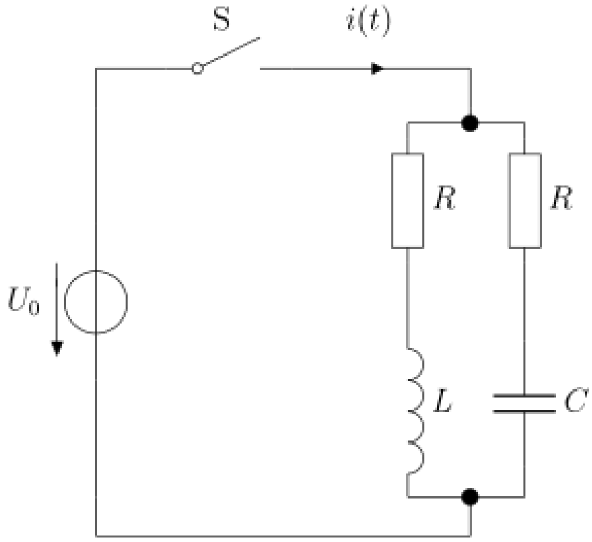
Trainingsaufgaben: Laplacetransformation



http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Laplacetransformation.pdf

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Übungsaufgabe: Laplacetransformation



Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a121_1.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=Al-oCqODUGw

Übungsaufgabe: Einschwingvorgang mit Laplacetransformation berechnen

Eine ideale Gleichstromquelle mit dem eingeprägten Strom I_K wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Parallelschaltung aus den Grundschaltelementen L, C und G verbunden.

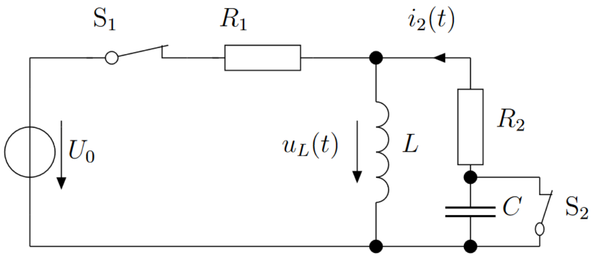
1. Berechnen Sie für $t > 0$ den zeitlichen Verlauf der an diesem Netzwerk liegenden Spannung $u(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.
2. Wie groß ist die Spannung an diesem Netzwerk für $t \to \infty$?
3. Geben Sie den zeitlichen Verlauf der Ströme an, die durch den Leitwert G und den Kondensator C fließen.

Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a121_3.pdf
https://youtu.be/1vprZUrDHCo

Übungsaufgabe: Einschwingvorgang mit Laplacetransformation berechnen



Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a121_6.pdf
https://youtu.be/UG_RkvIOC7U

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Tabelle 8.1.: Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Originalfunktion	**Bildfunktion**
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
1 oder $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t\ e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^n}{n!}\ e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\delta(t) - a\ e^{-at}$	$\frac{s}{s+a}$
$\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s\,(s+a)}$
$\frac{1}{a^2}\left(e^{-at} + at - 1\right)$	$\frac{1}{s^2\,(s+a)}$
$(1-at)\ e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{a^2}\left(1 - (1+at)\ e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s\,(s+a)^2}$
$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)\,(s+b)}$
$\frac{1}{a-b}\left(a\,e^{-at} - b\,e^{-bt}\right)$	$\frac{s}{(s+a)\,(s+b)}$
$\frac{(a-b) + b\,e^{-at} - a\,e^{-bt}}{a\,b\,(a-b)}$	$\frac{1}{s\,(s+a)\,(s+b)}$
$t\left(1 - \frac{a}{2}t\right)\ e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^3}$
$\left(1 - 2\,at + \frac{a^2}{2}t^2\right)\ e^{-at}$	$\frac{s^2}{(s+a)^3}$

Originalfunktion	**Bildfunktion**
$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\frac{-a\,e^{-at}}{(b-a)(c-a)} - \frac{b\,e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} - \frac{c\,e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega^2}\,(1-\cos\omega t)$	$\frac{1}{s\,(s^2+\omega^2)}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
$\frac{\frac{a}{\omega}\sin\omega t - \cos\omega t + e^{-at}}{a^2+\omega^2}$	$\frac{1}{(s+a)\,(s^2+\omega^2)}$
$\frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t - a\,e^{-at}}{a^2+\omega^2}$	$\frac{s}{(s+a)\,(s^2+\omega^2)}$
$\frac{1}{\omega}\,e^{-\delta t}\sin\omega t$	$\frac{1}{s^2+2\delta s+\delta^2+\omega^2}$
$\left(\cos\omega t - \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)\ e^{-\delta t}$	$\frac{s}{s^2+2\delta s+\delta^2+\omega^2}$
$\frac{1 - \left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)\ e^{-\delta t}}{\delta^2+\omega^2}$	$\frac{1}{s\,(s^2+2\delta s+\delta^2+\omega^2)}$
$\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - t\,\cos\omega t\right)$	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{2\omega}\,(\sin\omega t + \omega t\,\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

8.1.4. Schwingfall, Kriechfall und aperiodischer Grenzfall

Ein schwingfähiges System kann unterschiedliches Verhalten aufweisen. Denken Sie zum Beispiel an ein Fadenpendel, das in der Luft eine fast ungedämpft schwingt. Tauchen wir das Pendel in eine Flüssigkeit, so wird die Dämpfung größer, das Pendel kommt schneller zum Stillstand. Erhöht man nun die Zähigkeit der Flüssigkeit, so wird das Pendel irgendwann gar nicht mehr schwingen können. Es bewegt sich nur träge durch die zähe Masse, bis es seinen Ruhepunkt erreicht hat.
Die letzte Situation nennt man „Kriechfall“, es kommt zu keiner Schwingung mehr. Kann das Pendel noch schwingen (wenn auch nur kurz), spricht man vom „Schwingfall“. Technisch ist oft der „aperiodische Grenzfall“ interessant. Hier kommt es zu keiner Schwingung mehr, aber das Pendel erreicht seine Ruheposition in minimaler Zeit. (Eine Anwendung ist ein Verladekran. Hier möchte man nicht, dass die angehobene Last ins Schwingen gerät, gleichzeitig möchte man sie aber in minimaler Zeit von Punkt A zu Punkt B bewegen.)

Mathematisch weist die Funktion eines schwingfähigen Systems im Bildbereich eine doppelte Polstelle (also eine doppelte Nullstelle im Nenner) auf. Wir nennen Sie s_{p1} und s_{p2}. Nun können drei Fälle aufteten:

- $s_{\mathrm{p1}} = s_{\mathrm{p2}}^*$ (s_{p1} und s_{p2} sind jeweils die konjugiert-komplexe der anderen Polstelle): Schwingfall.
- s_{p1} und s_{p2} sind beide reell: Kriechfall.
- s_{p1} und s_{p2} sind beide reell und gleich: aperiodischer Grenzfall.

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.


8.1.5. Beispiel

In der folgenden Schaltung war der Schalter S schon sehr lange Zeit geöffnet, so dass sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Wir möchten den zeitlichen Verlauf des Spulenstroms $i_L(t)$ berechnen.

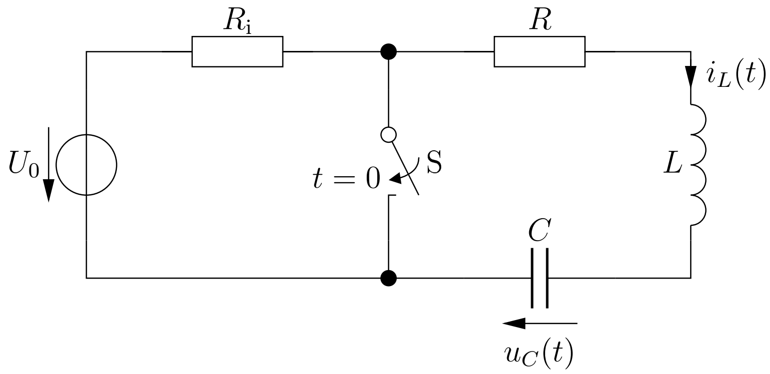


Abbildung 8.3.: Beispielschaltung. Gesucht ist der zeitliche Verlauf von $i_L(t)$.

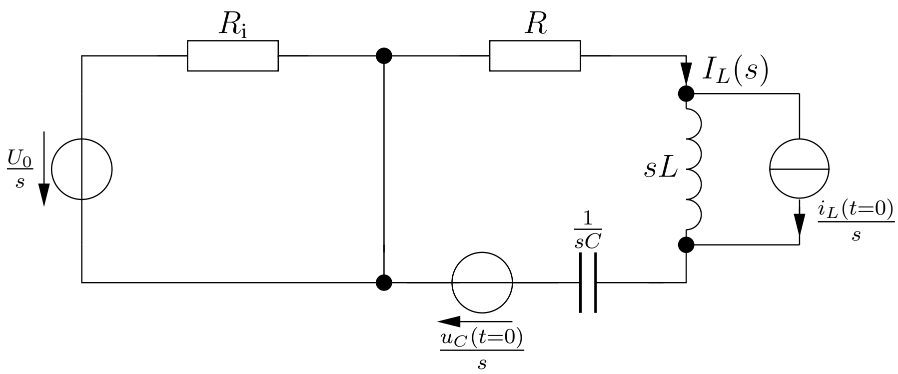
Zunächst machen wir uns Gedanken über die Anfangsbedingungen an L und C. Hierfür betrachten wir das Schaltbild vor dem Schließen des Schalters. Im eingschwungenen Zustand konnte kein Strom durch die Schaltung fließen (der Kondensator verhindert des Stromfluss in einer Gleichstromschaltung). Dies führt auf die erste Anfangsbedingung:

$$i_L(t \leq 0) = 0.$$

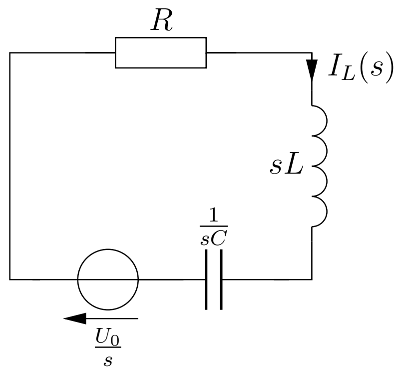
Da kein Strom fließt, fällt keine Spannung an den Widerständen ab. Die Induktivität verhält sich im Gleichstromfall wie ein Kurzschluss. Der Kirchhoffsche Maschensatz liefert uns die Anfangsspannung am Kondensator:

$$u_C(t \leq 0) = U_0.$$

Nun zeichnen wir die Schaltung für $t \geq 0$ in den Bildbereich um (siehe auch Abb. 8.1 und 8.2).



Da $i_L(t=0)=0$, müssen wir die Stromquelle parallel zu sL nicht mit einzeichnen. Wir suchen $I_L(s)$. Da der Schalter nun wie ein Kurzschluss wirkt, hat die Quelle U_0/s keinen Einfluss auf $I_L(s)$. Die Schaltung im Bildbereich lässt sich also weiter vereinfachen:



Nun berechnen wir den gesuchten Strom $I_L(s)$. Dies ist im Bildbereich sehr einfach, wir wenden eigentlich nur das Ohmsche Gesetz an:

$$I_L(s) = \frac{\frac{U_0}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}}.$$

Diese Gleichung müssen wir nun in den Zeitbereich zurücktransformieren, um den zeitlichen Verlauf von $i_L(t)$ zu erhalten. In Tabelle 8.1 können wir diesen Ausdruck jedoch nicht direkt finden. Darum formen wir ihn um:

$$\begin{aligned} I_L(s) &= \frac{\frac{U_0}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{s/L}{s/L} \\ &= \frac{U_0/L}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

In Tabelle 8.1 finden wir folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{s^2 + 2\delta s + \delta^2 + \omega^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t)$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch:

$$\begin{aligned} s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} &= s^2 + 2\delta s + \delta^2 + \omega^2 \\ \Rightarrow \frac{R}{L} &= 2\delta \\ \frac{1}{LC} &= \delta^2 + \omega^2 \\ \to \delta &= \frac{R}{2L} \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \end{aligned}$$

Die Zeitfunktion des gesuchten Stroms lautet also

$$i_L(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{\omega} \, \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\omega t).$$

Zuletzt wollen wir untersuchen, wann Schwingfall, Kriechfall und aperiodischer Grenzfall auftreten. Hierfür analysieren wir die Polstellen der Bildfunktion (also die Nullstellen des Nenners).

$$\begin{aligned} s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} &= 0 \\ \rightarrow s_{\mathrm{p}1,2} &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

Ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ, wird das Ergebnis der Wurzel imaginär. Wir hätten also ein konjugiert-komplexes Polstellenpaar.

$\Rightarrow$ Schwingfall bei $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$.

Ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv, wird das Ergebnis der Wurzel reell. Wir hätten also zwei reelle Polstellen.

$\Rightarrow$ Kriechfall bei $\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2$.

Wird der Ausdruck unter der Wurzel Null, so liegt eine doppelte Polstelle vor.

$\Rightarrow$ Aperiodischer Grenzfall bei $\frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2$.

Der zeitliche Verlauf des Stroms ist für die drei Fälle in Abb. 8.4 dargestellt.

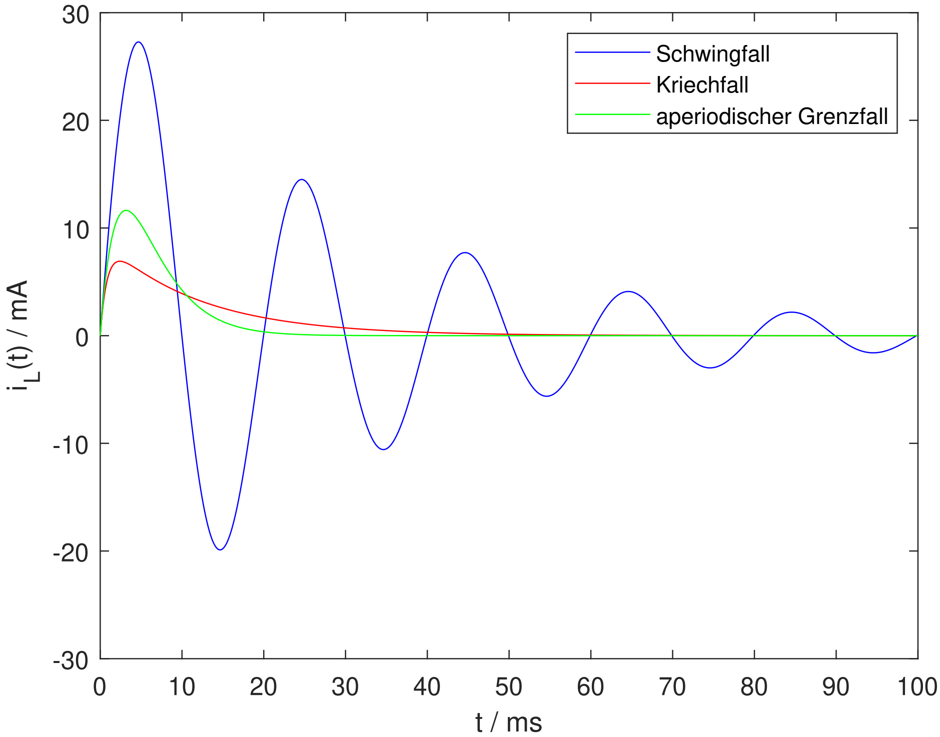
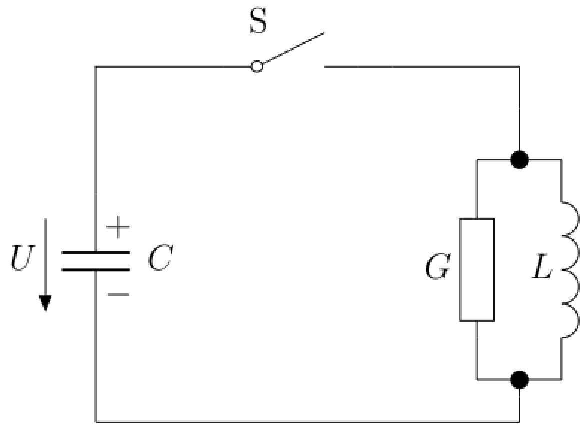


Abbildung 8.4.: Zeitverläufe des Stroms $i_L(t)$ der Schaltung in Abb. 8.3 für $U_0 = 10\,\mathrm{V}$, $L = 1\,\mathrm{H}$, $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ und $R = \frac{2}{10}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $R = 4\sqrt{\frac{L}{C}}$ bzw. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Übungsaufgabe: Aperiodischer Grenzfall



Aufgabenblatt

Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a121_5.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=p2mw4T9beR8

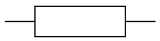
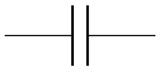
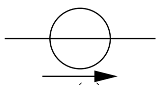
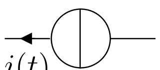
Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

A. Anhang

A.1. Ideale Grundelemente eines Schaltkreises

Ein ideales Grundelement

- besitzt zwei Anschlüsse,
- lässt sich mathematisch als Ausdruck von Strom und/oder Spannung beschreiben,
- kann nicht in kleinere Elemente zerlegt werden.

Element	**allgemein**	**Gleichspannung / -Strom**	**sinusförmige Anregung**
Widerstand  R	$u(t) = R \cdot i(t)$	$U = R \cdot I$	$i(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t)$ $u(t) = \underbrace{R \cdot \hat{\imath}}_{\hat{u}} \sin(\omega t)$ $\hat{u} \cdot \sin(\omega t)$
Kapazität  C	$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ $u_C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} i_C(t')\,\mathrm{d}t' + U_C(t_0)$	Annahme: U_C ist bekannt und konstant $I_C = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = 0$ In einem Gleichstromkreis verhält sich ein Kondensator wie ein Leerlauf.	$u_C(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ $i_C(t) = \underbrace{C\omega\hat{u}}\cos(\omega t)$ $= \quad \hat{\imath}\sin(\omega t + \pi/2)$ komplexe Schreibweise: $\underline{I}_C = \mathrm{j}\omega C \cdot \underline{U}_C$
Induktivität  L	$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$ $i_L(t) = \int\limits_{t_0}^{t} u_L(t')\,\mathrm{d}t' + I_L(t_0)$	Annahme: I_L ist bekannt und konstant $U_L = L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} = 0$ In einen Gleichstromkreis verhält sich eine Spule wie ein Kurzschluss.	$i_L(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t)$ $u_L(t) = \underbrace{L\omega\hat{\imath}}\cos(\omega t)$ $= \quad \hat{u}\sin(\omega t + \pi/2)$ Komplexe Schreibweise: $\underline{U}_L = \mathrm{j}\omega L \cdot \underline{I}_L$
Spannungsquelle  $u(t)$	$u(t)$ ist bekannt und nicht von außen beeinflussbar $i(t)$ hängt von der angeschlossenen Schaltung ab	$U = \mathrm{const}$ I hängt von der angeschlossenen Schaltung ab	$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi)$; $\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ $i(t)$ oder $\underline{I}$ hängt von der angeschlossenen Schaltung ab
Stromquelle  $i(t)$	$i(t)$ ist bekannt und nicht von außen beeinflussbar $u(t)$ hängt von der angeschlossenen Schaltung ab	$I = \mathrm{const}$ U hängt von der angeschlossenen Schaltung ab	$i(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t + \varphi)$; $\underline{I} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ $u(t)$ oder $\underline{U}$ hängt von der angeschlossenen Schaltung ab

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.


A.2. Mathematische Spielereien

A.2.1. Funktionswerte von Sinus und Cosinus

Wichtige Werte von Sinus und Cosinus sind:

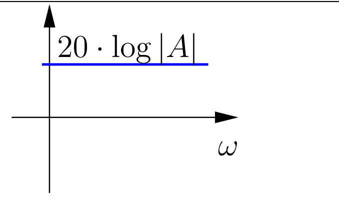
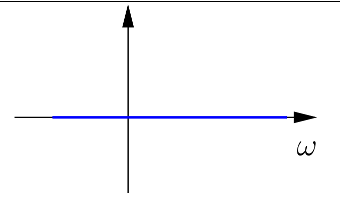
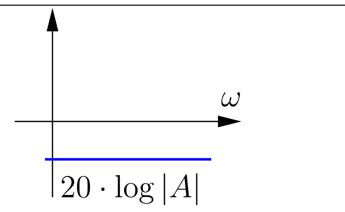
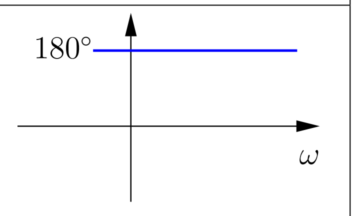
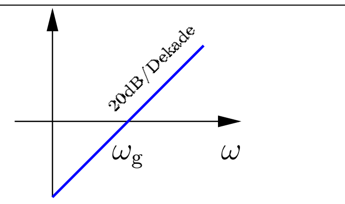
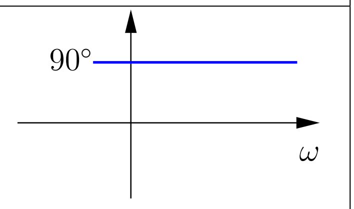
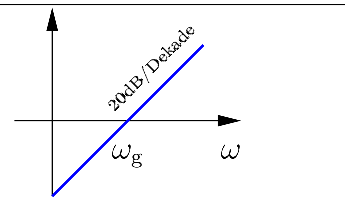
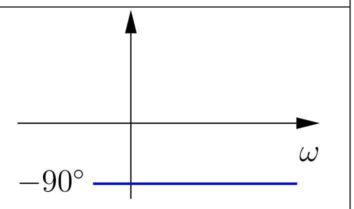
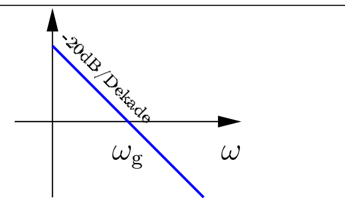
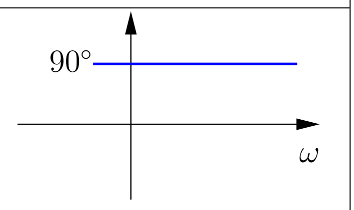
	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

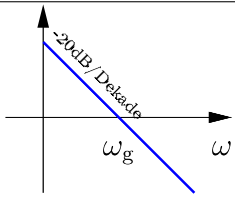
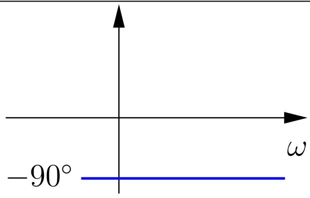
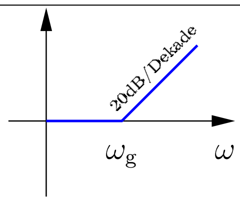
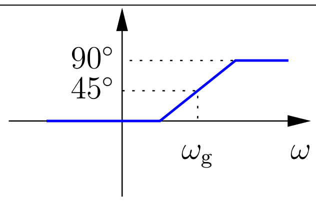
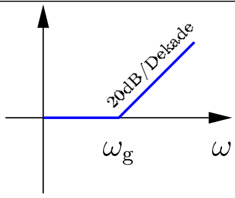
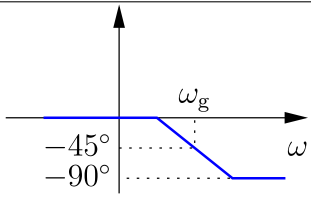
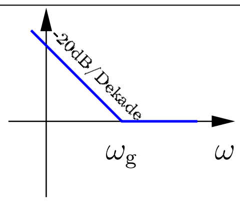
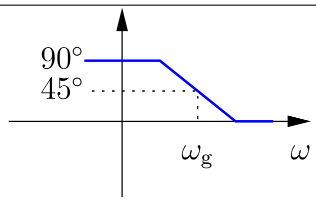
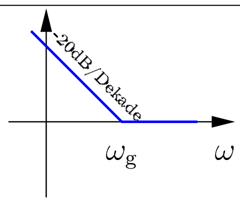
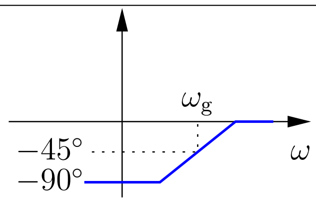
Diese Funktionswerte kann man sich auf folgende Weise ganz leicht merken:

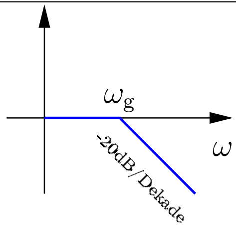
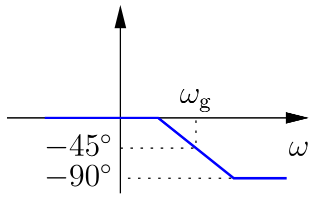
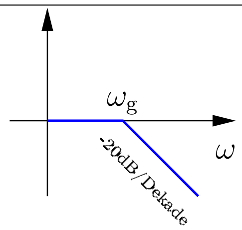
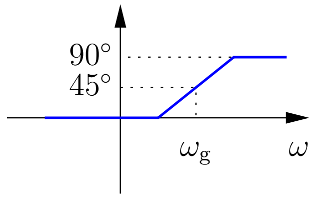
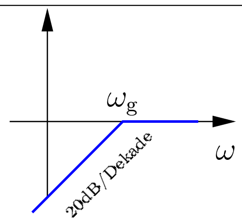
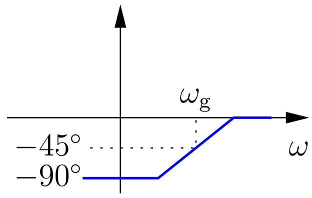
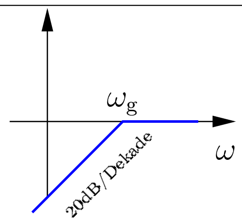
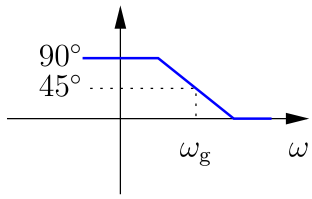
	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

A.3. Bodediagramme – Grundfunktionen

Die folgenden Tabellen stellen einige Grundfunktionen zusammen, welche Ihnen beim Bearbeiten von Bodediagrammen begegnen können. Lernen Sie sie auf keinen Fall auswendig, sondern nutzen Sie die Zusammenstellung nur um zu kontrollieren, ob Sie das Konstruktionsprinzip verstanden haben!

Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$	Amplituden-Frequenzgang $\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert$ in dB	Phasen-Frequenzgang $\angle(H(\mathrm{j}\omega))$
$A > 0$ (Konstante)		
$A < 0$ (Konstante)		
$\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{g}}$		
$-\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{g}}$		
$\mathrm{j}\frac{\omega_\mathrm{g}}{\omega}$		

Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$	Amplituden-Frequenzgang $\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert$ in dB	Phasen-Frequenzgang $\angle(H(\mathrm{j}\omega))$
$-\mathrm{j}\frac{\omega_\mathrm{g}}{\omega}$		
$1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{g}}$		
$1-\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{g}}$		
$1+\mathrm{j}\frac{\omega_\mathrm{g}}{\omega}$		
$1-\mathrm{j}\frac{\omega_\mathrm{g}}{\omega}$		

Übertragungs-funktion $H(\mathrm{j}\omega)$	Amplituden-Frequenzgang $\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert$ in dB	Phasen-Frequenzgang $\angle(H(\mathrm{j}\omega))$
$\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{g}}}$		
$\frac{1}{1-\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{g}}}$		
$\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega_\mathrm{g}}{\omega}}$		
$\frac{1}{1-\mathrm{j}\frac{\omega_\mathrm{g}}{\omega}}$		

Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

A.4. Statistik

Dieses Skript umfasst

- 44 Erklärvideos,
- 33 Übungsaufgaben mit Lösungsvideos und
- 11 Sammlungen mit Trainingsaufgaben.