

Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Elektrotechnik
Grundlagen der Elektrotechnik
Univ.-Prof. Dr.-Ing. S. Dickmann



Grundlagen der Elektrotechnik

— das interaktive Skript —

Teil 3: Elektrische und magnetische Felder

von Dr.-Ing. Stefan Schenke



Dieses Skript finden Sie auf
www.stefan-schenke.de/get



Version vom 6. Mai 2022.



Mein Lehrmaterial stelle ich kostenlos im Internet zur Verfügung.

Wenn ich Ihnen damit helfen konnte, würde ich mich sehr über eine Postkarte für meine Pinwand freuen 😊



Vorwort

Schon während meines Studiums in Kiel leitete ich im Rahmen eines Hiwi-Jobs Übungsgruppen im Fach „Grundlagen der Elektrotechnik“ (an dieser Stelle vielen Dank an Prof. Klinkenbusch). Wie es das Schicksal so will, fand ich danach eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Grundlagen der Elektrotechnik in Hamburg, wo ich erst promovierte und anschließend eine Anstellung als wissenschaftlicher Laborleiter fand. So kommt es, dass ich mittlerweile seit fast 20 Jahren mit vollem Eifer darum bemüht bin, Studienanfängern die Grundlagen so anschaulich wie möglich zu vermitteln.

Das vorliegende Skript ist eine Zusammenstellung meiner Erklärungsmethoden. Hierbei versuche ich in erster Linie anschaulich zu sein, damit Sie den Sinn & Zweck der einzelnen Themen verstehen. Ich erhebe keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit! Dieses Skript kann und soll kein Lehrbuch ersetzen, sondern Ihnen den Einstieg in ein Thema vereinfachen.

Zudem handelt es sich hier um die erste Version! Im Gegensatz zu einem Fachbuch haben weder ein Lektor oder ein fachlicher Experte die folgenden Seiten zur Kontrolle gelesen. Passen Sie also auf, Sie werden bestimmt Fehler entdecken. Bitte seien Sie dann so nett und schreiben Sie mir einen kurzen Hinweis an stefan.schenke@hsu-hh.de.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg in Ihrem Studium!



Interaktive Elemente

Youtube-Videos

Mit diesem Skript möchte ich Ihnen helfen, die Grundlagen der Elektrotechnik zu verstehen. Um Sie auf verschiedenen Wegen zu erreichen, erkläre ich viele Dinge auch auf Youtube. In den folgenden Kapiteln finden Sie QR-Codes, die auf Videos zum selben Thema verweisen. (Die Grafiken sind auch klickbar, wenn Sie dieses Skript in elektronischer Form lesen.)

Trainingsaufgaben

Die Grundlagen sind eigentlich ganz einfach. (Das ist z.B. Bruchrechnung aber auch!) Sie brauchen aber Übung, damit Sie das Gelernte anwenden können. Aus diesem Grund habe ich Aufgabenblätter mit Trainingsaufgaben erstellt. Diese Aufgaben sind auch ganz einfach und beziehen sich immer direkt auf das gerade behandelte Thema. Ich rate Ihnen dringend, alle Trainingsaufgaben zu lösen!

Übungsaufgaben

Diese Aufgaben bespreche ich auch in meinen „Übungen“, also in einer Lehrveranstaltungen mit meinen Studierenden. Diese Aufgaben sind also (im Gegensatz zu den Trainingsaufgaben) auf Uni-Niveau. Allerdings habe ich Beispiele gewählt, die anschaulich sind und keine, die als superschwer wahrgenommen werden. Sie können sich sowohl das Aufgabenblatt herunterladen als auch ein Lösungsvideo auf Youtube anschauen.



Inhaltsverzeichnis

9. Elektrische Felder	7
9.1. Stationäres elektrisches Strömungsfeld	7
9.1.1. Benötigte Formeln	7
9.1.2. Beispiele	11
9.1.3. Relevante Geometrien	17
9.2. Elektrostatik	22
9.2.1. Benötigte Formeln	22
9.2.2. Beispiele	24
10. Magnetische Felder	29
10.1. Magnetisches Feld um einen stromdurchflossenen Leiter	29
10.2. Magnetisches Feld <i>in</i> einem stromdurchflossenen Leiter	33
10.3. Magnetische Flussdichte	36
10.3.1. Magnetische Kraft auf stromdurchflossene Leiter	36
10.3.2. Magnetisierbare Materialien	37
10.4. Magnetischer Kreis	43
10.4.1. Elektrisches Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises	45
10.5. Induktionsgesetz	50
A. Anhang	53
A.1. Magnetische Feldstärke H	53
A.2. Statistik	57



9. Elektrische Felder

9.1. Stationäres elektrisches Strömungsfeld

Bisher sind wir in elektrischen Netzwerken von konzentrierten Bauelementen ausgegangen. Dies bedeutet, dass man z. B. einen ohmschen Widerstand R darauf reduziert, dass durch ihn ein Strom I fließt und eine Spannung U an ihm abfällt. Die drei Größen sind über das Ohmsche Gesetz miteinander verknüpft: $R = U/I$.

Hier soll nun betrachtet werden, wie sich der Strom über die Querschnittsfläche eines Widerstandskörpers verteilt.

9.1.1. Benötigte Formeln

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (9.1)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \vec{J} \quad (9.2)$$

$$U_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (9.3)$$

$$R = \frac{U}{I} \quad (9.4)$$

Die Bedeutung der Variablen wird in den nächsten Abschnitten erläutert.

Strom und Stromdichte, Gleichung (9.1)

Die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ ist ein Maß für den Strom dI , der durch eine infinitesimal kleine Fläche dA fließt

$$\vec{J} = \frac{dI}{dA} \vec{e}_I.$$

Gemäß Gl. (9.1) ist der Gesamtstrom I das Integral der Stromdichte $\vec{J}$ über eine Querschnittsfläche A des Leiters.

Die Rechnung vereinfacht sich sehr stark, wenn man eine Äquipotentialfläche als Integrationsfläche wählt. Dies ist eine Fläche, auf der alle Feldlinien von $\vec{J}$ senkrecht stehen, siehe Abb. 9.1.

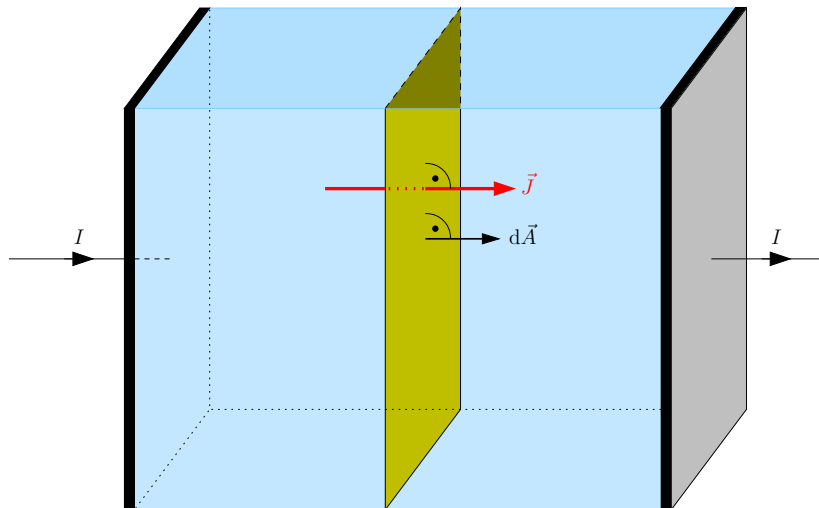


Abbildung 9.1.: Wahl einer geeigneten Integrationsfläche zur Anwendung von Gl. (9.1).

Dadurch dass nun die Feldlinien der Stromdichte $\vec{J}$ und die Flächennormalenvektoren $d\vec{A}$ parallel zueinander stehen, vereinfacht sich Gl. (9.1), denn das Skalarprodukt von parallelen Vektoren ergibt das Produkt ihrer Beträge:

$$I = \iint_A J \cdot dA.$$

Für den Fall, dass zusätzlich J auf der gesamten Fläche konstant ist, lässt sich J vor das Integral ziehen und die Gleichung vereinfacht sich weiter

$$I = J \cdot \iint_A dA,$$

$$I = J \cdot A. \quad (9.5)$$

Für den Fall, dass die Stromdichte $\vec{J}$ auf einer Äquipotentialfläche A konstant ist, lässt sie sich mit Hilfe von Gl. (9.5) direkt angeben:

$$J = \frac{I}{A}.$$

Dies ist dann der Fall, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Leitfähigkeit κ ist konstant auf A ,
2. die Feldlinien von $\vec{J}$ verlaufen parallel zueinander,
3. die Feldlinien von $\vec{J}$ sind gleich lang.



Elektrisches Feld und elektrische Stromdichte, Gleichung (9.2)

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist ein Maß für die Kraft, mit der an Ladungsträgern *gezogen* wird. Sie ist gemäß Gl. (9.2) über die elektrische Leitfähigkeit κ mit der Stromdichte $\vec{J}$ verknüpft. Die Bedeutung ist sehr anschaulich, wenn man die Formulierung

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

wählt: Wird mit konstanter Kraft an den Ladungsträgern *gezogen*, so wird bei einer größeren Leitfähigkeit κ der Stromfluss größer sein.

Elektrische Spannung und elektrisches Feld, Gleichung (9.3)

Die elektrische Spannung U zwischen zwei Punkten erhält man, wenn man die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ entlang eines Weges zwischen beiden Punkten integriert. Wählt man als Weg den Verlauf einer Feldlinie, so vereinfacht sich Gl. (9.3) folgendermaßen (siehe auch Abb. 9.2):

$$U_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

$$U_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} E \cdot ds.$$

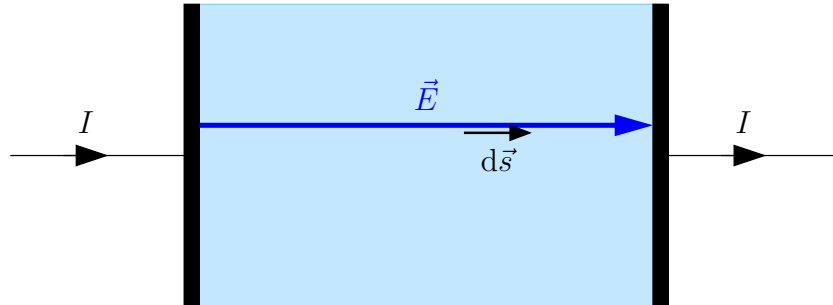


Abbildung 9.2.: Wahl eines geeigneten Integrationswegs zur Anwendung von Gl. (9.3).

Für den Fall, dass zusätzlich die elektrische Feldstärke E entlang des Weges konstant ist (κ konstant entlang einer Feldlinie, Feldlinien verlaufen parallel, Feldlinien sind gleich lang), lässt sich E vor das Integral ziehen und man erhält

$$U_{P_1 \rightarrow P_2} = E \cdot \int_{P_1}^{P_2} ds,$$

$$U_{P_1 \rightarrow P_2} = E \cdot d. \quad (9.6)$$



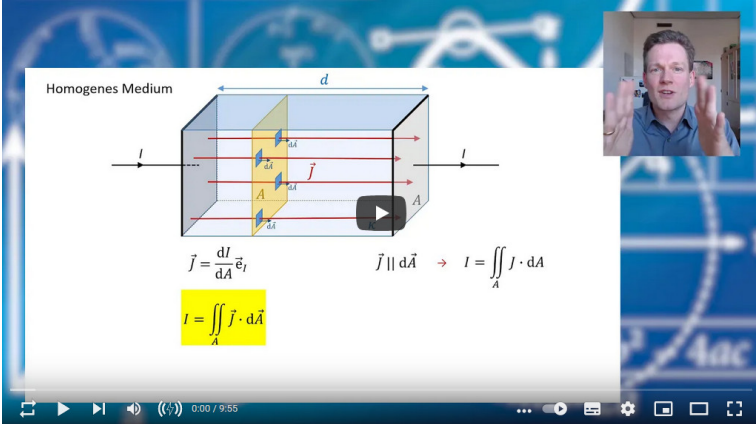
9. Elektrische Felder

Hierbei ist d die Länge des Integrationswegs.

Elektrischer Widerstand, Gleichung (9.4)

Hat man mit Hilfe der Gleichungen (9.1)–(9.3) den Strom I und die Spannung U bestimmt, lässt sich über das Ohmsche Gesetz, Gl. (9.4) der elektrische Widerstand der Anordnung berechnen.

Elektrisches Strömungsfeld 01 - homogenes Medium



$$\vec{J} = \frac{dI}{dA} \vec{e}_l$$

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{J} \parallel d\vec{A} \rightarrow I = \iint_A J \cdot dA$$

<https://www.youtube.com/watch?v=h5OG097zKM0>



9.1.2. Beispiele

Die Anwendung der Gleichungen (9.1)–(9.4) wird im Folgenden anhand von Beispielen erläutert.

Geschichtetes Leitermaterial, Reihenschaltung

Ein Strom I fließt über ideal leitende Kontaktflächen durch die Reihenschaltung zweier leitender Materialien κ_1 und κ_2 . Um die Stromdichte nach Gl. (9.1) berechnen zu

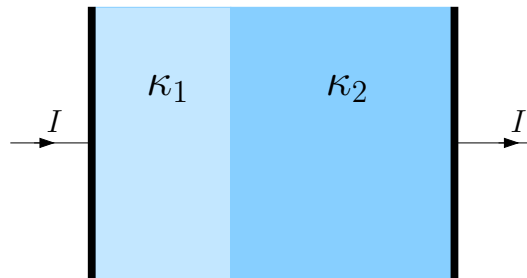


Abbildung 9.3.: Geometrische Anordnung der in Reihe geschalteten Materialien κ_1 und κ_2 .

können, wählt man eine Integrationsfläche gemäß Abb. 9.1. Da die Leitfähigkeit κ über die Fläche konstant ist und aufgrund der Geometrie auch die Stromdichte J auf der Fläche konstant sein wird, lässt sich Gl. (9.1) zu Gl. (9.5) vereinfachen:

$$J = \frac{I}{A},$$

siehe auch Abb. 9.4.

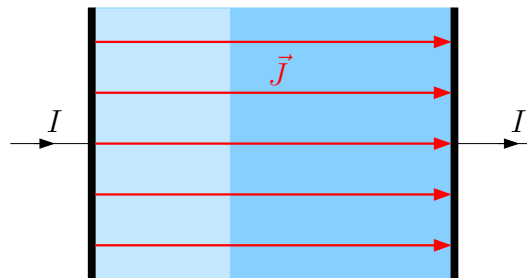


Abbildung 9.4.: Die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ ist konstant.

Aus der Stromdichte lässt sich nun mit Gl. (9.2) das elektrische Feld berechnen. Es ist aufgrund der unterschiedlichen Leitfähigkeiten in beiden Raumgebieten unterschiedlich.

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\kappa_1} J \\ E_2 &= \frac{1}{\kappa_2} J \end{aligned}$$



9. Elektrische Felder

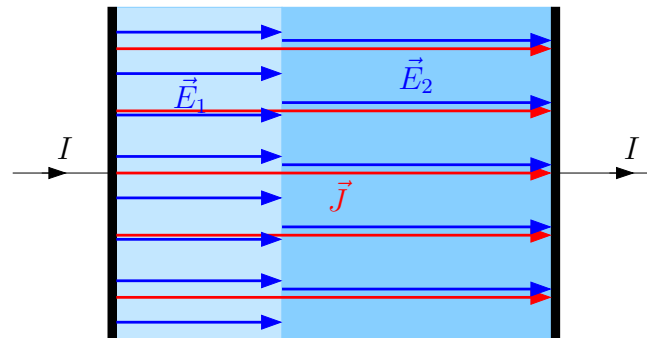


Abbildung 9.5.: Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist in beiden Raumgebieten unterschiedlich.

Die Berechnung der elektrischen Spannung und des ohmschen Widerstands kann direkt mit Hilfe der Gleichungen (9.3) und (9.4) erfolgen.

Elektrisches Strömungsfeld 02 - in Längsrichtung geschichtetes Medium

Die Berechnung des elektrischen Strömungsfeldes in einem geschichteten Medium wird dargestellt. Die Formeln für die Stromdichte $\vec{J} = \kappa \vec{E}$, die Spannung $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ und den Widerstand $R = \frac{U}{I}$ sind aufgeführt. Die Berechnung der Stromdichte $J = \frac{I}{A}$ ist ebenfalls dargestellt.

<https://www.youtube.com/watch?v=W6FAKL0gt6c>



Elektrisches Strömungsfeld 03 - Medienänderung in Längsrichtung

Diagram of a cylindrical capacitor with a dielectric that changes linearly from 1 to 2 over a length d . The electric field $\vec{E}(x)$ and current density $\vec{j}$ are shown. The permittivity is given by $\kappa = \left(2 - \frac{x}{d}\right) \cdot \kappa_0$.

Formulas shown in the video:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{j} = \kappa \vec{E}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

Current density: $j = \frac{I}{A}$

Electric field: $\vec{j} = \kappa \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{j} = \frac{I}{\left(2 - \frac{x}{d}\right) \cdot \kappa_0 \cdot A} \vec{e}_x$



https://www.youtube.com/watch?v=sqorVtT_-T0



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Geschichtetes Leitermaterial, Parallelschaltung

In diesem Beispiel sind zwei leitende Materialien als Parallelschaltung angeordnet, siehe Abb. 9.6. Der Strom I und die Spannung U seien bekannt. Die Stromdichte lässt sich

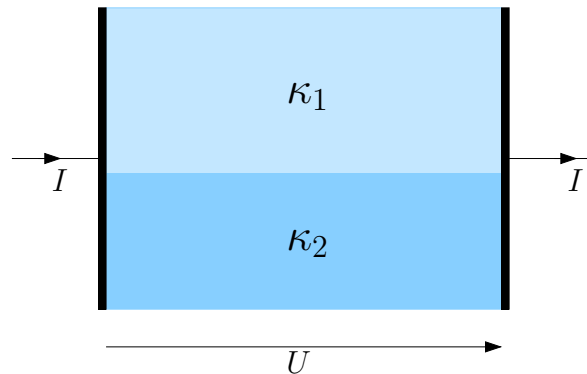


Abbildung 9.6.: Geometrische Anordnung der parallel geschalteten Materialien κ_1 und κ_2 .

jetzt nicht mehr einfach über Gl. (9.5) bestimmen, denn auf einer Äquipotentialfläche gemäß Abb. 9.1 ist die Leitfähigkeit nicht konstant. Allerdings treffen die Bedingungen zu, dass entlang *einer* $\vec{E}$ -Feldlinie die Leitfähigkeit konstant ist, alle $\vec{E}$ -Feldlinien parallel zueinander verlaufen und die selbe Länge besitzen, siehe Abb. 9.7. Für die

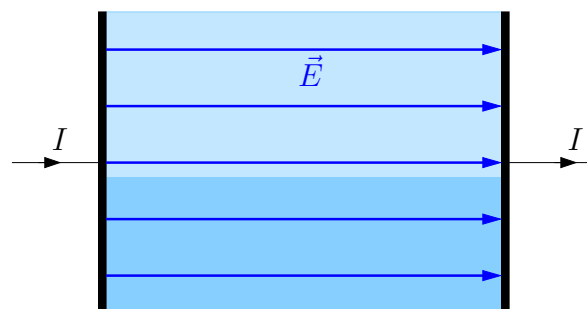


Abbildung 9.7.: Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist konstant.

elektrische Feldstärke gilt also gemäß Gl. (9.6)

$$E = \frac{U}{d}.$$

Für die Stromdichte ergibt sich nach Gl. (9.2)

$$J = \kappa E,$$

siehe auch Abb. 9.8.



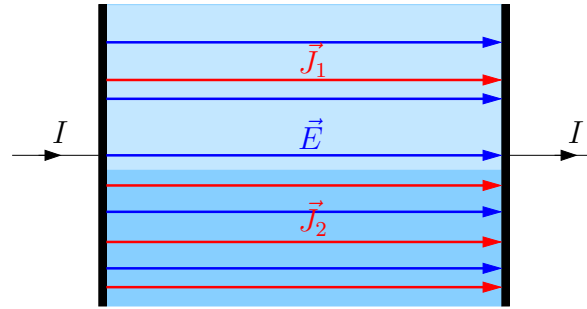


Abbildung 9.8.: Die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ ist in beiden Raumgebieten unterschiedlich

Der Strom I , kann mit Hilfe von Gl. (9.1) bestimmt werden, wobei man ausnutzen kann, dass die Stromdichte auf den beiden Teilquerschnittsflächen jeweils konstant ist.

$$I = J_1 \cdot A_1 + J_2 \cdot A_2.$$

Der elektrische Widerstand der Anordnung berechnet sich nun aus dem Ohmschen Gesetz (Gl.(9.4)):

$$R = \frac{U}{I}.$$

Elektrisches Strömungsfeld 04 - quer geschichtetes Medium

$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$
 $\vec{J} = \kappa \vec{E}$
 $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$
 $R = \frac{U}{I}$

$U = E \cdot d$ $\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{e}_x$
 $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ $\vec{J}_1 = \kappa_1 \vec{E} = \frac{\kappa_1 U}{d} \vec{e}_x$
 $\vec{J}_2 = \kappa_2 \vec{E} = \frac{\kappa_2 U}{d} \vec{e}_x$

<https://www.youtube.com/watch?v=W9Nef6eSPHQ>



Elektrisches Strömungsfeld 05 - Medienänderung in Querrichtung

$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$
 $\vec{j} = \kappa \vec{E}$
 $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$
 $R = \frac{U}{I}$

$\kappa = \left(3 - \frac{y}{h}\right) \kappa_0$
 $\vec{j} = \left(3 - \frac{y}{h}\right) \kappa_0 \cdot \frac{U}{d} \vec{e}_x$
 $I = \frac{\kappa_0 U}{d} \int_{y=0}^h \int_{z=0}^d \left(3 - \frac{y}{h}\right) \cdot dz dy$



<https://www.youtube.com/watch?v=UOBaxHyEx-Q>

Elektrisches Strömungsfeld 06 - Zusammenfassung

$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$
 $\vec{j} = \kappa \vec{E}$
 $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$
 $R = \frac{U}{I}$

$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$



<https://www.youtube.com/watch?v=InessykFzEs>

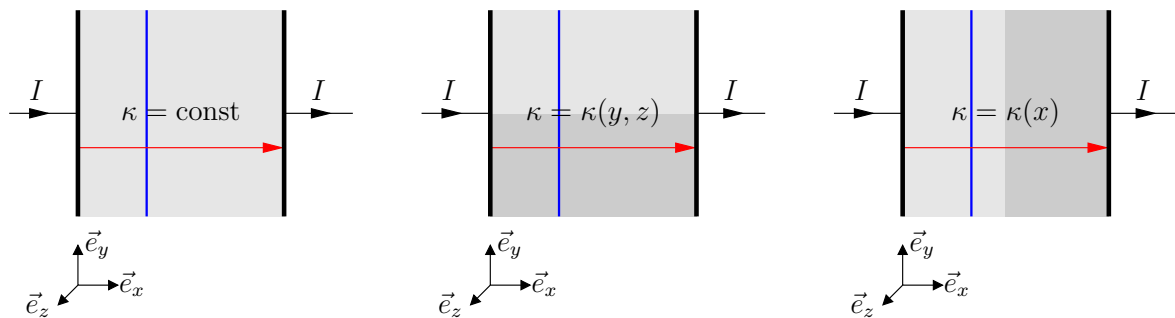


9.1.3. Relevante Geometrien

In den folgenden Abschnitten sind die in Rahmen der GET-Lehrveranstaltung betrachteten Geometrien vorgestellt. Beispielhaft sind jeweils eine Äquipotentialfläche (blau) und eine Feldlinie (rot) eingezeichnet. Teilweise ist in den Beispielen die elektrische Leitfähigkeit κ nicht konstant, sondern hängt von einer (oder mehreren) Richtung(en) ab, in den Abbildungen durch unterschiedliche Graustufen dargestellt. Die Änderung der Leitfähigkeit muss nicht sprunghaft stattfinden (wie man fälschlicherweise aufgrund der Abbildungen vermuten könnte), sondern kann kontinuierlich erfolgen (in einer Übungsaufgabe wäre dann eine Formel für κ angegeben).

Parallele Platten

Gegeben sind zwei ideal leitende rechteckige Platten (Höhe: h , Breite b), die parallel (Abstand d) zueinander stehen. Zwischen den Platten befindet sich ein leitfähiger Werkstoff.



$$I = J \cdot A$$

$$J = \frac{I}{b \cdot h}$$

$$E = \frac{J}{\kappa}$$

$$U = E \cdot d$$

$$U = E \cdot d$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$J(y, z) = \kappa(y, z) \cdot E$$

$$I = \int_{z=0}^b \int_{y=0}^h J(y, z) \cdot dy \, dz$$

$$I = J \cdot A$$

$$J = \frac{I}{b \cdot h}$$

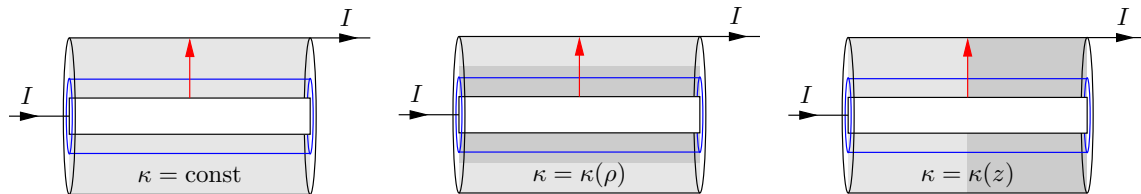
$$E(x) = \frac{J}{\kappa(x)}$$

$$U = \int_{x=0}^d E(x) \cdot dx$$



Zylindergeometrie

Zwei ideal leitende Rohre der Länge l und den Radien ρ_i und ρ_a stecken konzentrisch ineinander. Zwischen ihnen befindet sich ein leitfähiger Werkstoff.



$$I = J(\rho) \cdot A(\rho)$$

$$J(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho l}$$

$$U = \int_{\rho_a}^{\rho_i} E(\rho) \cdot d\rho$$

$$U = \int_{\rho=\rho_i}^{\rho=\rho_a} \frac{I}{\kappa 2\pi\rho l} \cdot d\rho$$

$$U = \frac{I}{\kappa 2\pi l} \ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)$$

$$I = J(\rho) \cdot A(\rho)$$

$$J(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho l}$$

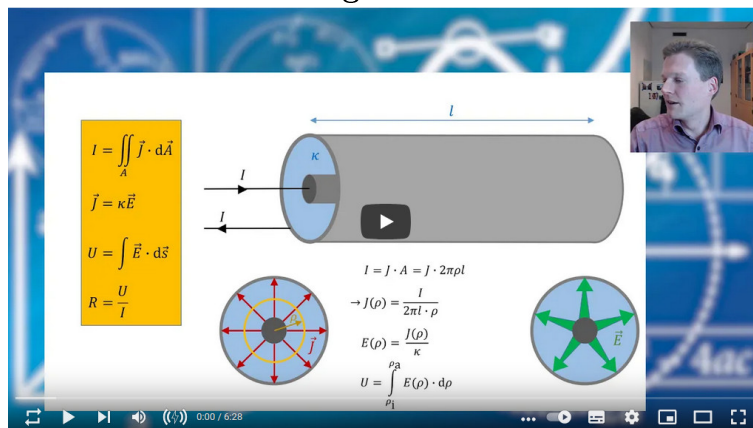
$$U = \int_{\rho_a}^{\rho_i} E(\rho) \cdot d\rho$$

$$U = \int_{\rho=\rho_i}^{\rho=\rho_a} \frac{I}{\kappa(\rho) 2\pi\rho l} \cdot d\rho$$

In GET wird Ihnen nur der Fall begegnen, dass es verschiedene Gebiete mit jeweils konstanter Leitfähigkeit gibt.

Diese Raumbereiche können Sie separat betrachten. Beachten Sie, dass $\vec{E}(\rho)$ in jedem Bereich identisch ist.

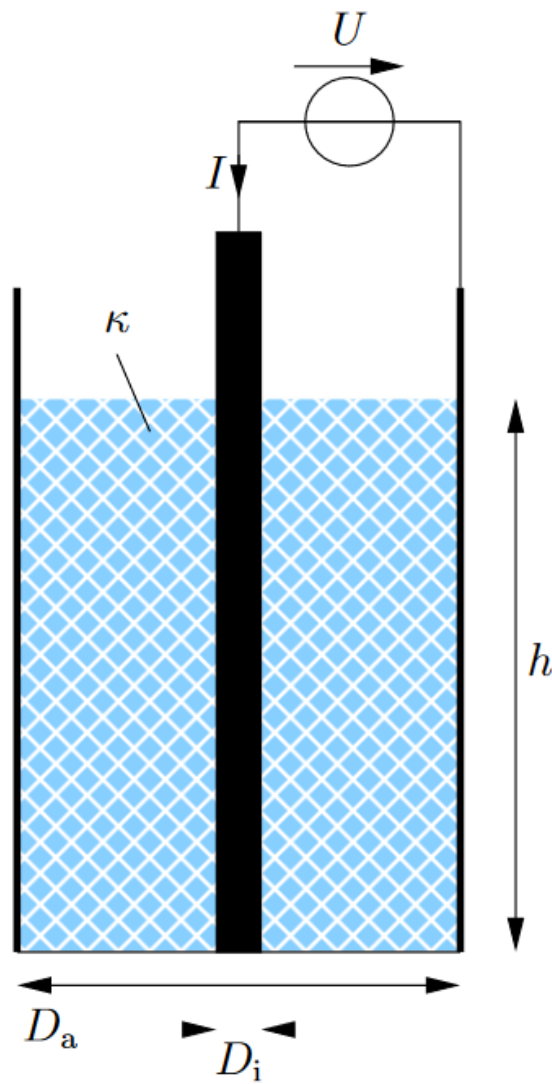
Elektrisches Strömungsfeld 07 - Bonusmaterial: Zylindergeometrie



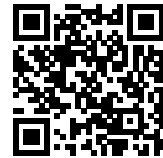
<https://www.youtube.com/watch?v=bnusn-aGWSs>



Übungsaufgabe: Stromdichte im Becherglas



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

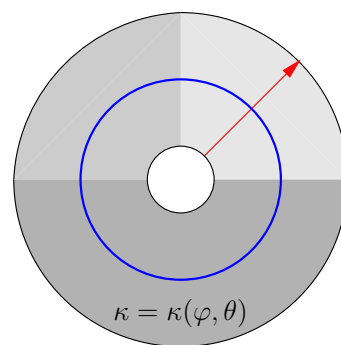
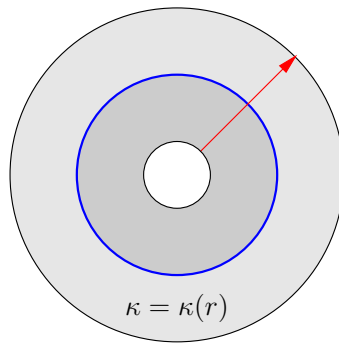
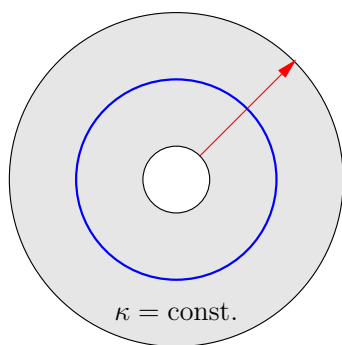
http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aStromdichte_1.pdf
<https://youtu.be/7f0cPPh1VL4>



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
 Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Kugelgeometrie

Zwei ideal leitende Kugeln mit den Radien r_i und r_a stecken konzentrisch ineinander. Zwischen ihnen befindet sich ein leitfähiger Werkstoff.



$$I = J(r) \cdot A(r)$$

$$J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} \frac{J(r)}{\kappa} dr$$

$$U = \frac{I}{2\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

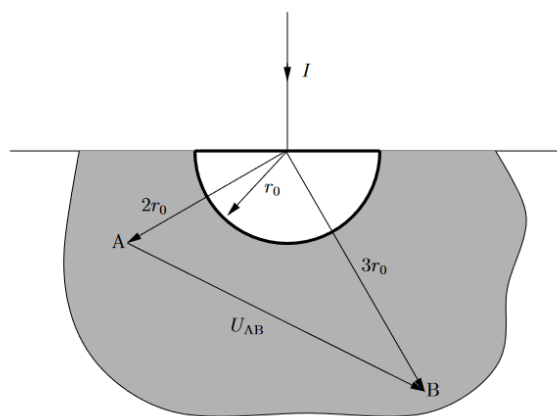
$$I = J(r) \cdot A(r)$$

$$J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} \frac{J(r)}{\kappa(r)} dr$$

In GET wird Ihnen nur der Fall begegnen, dass es verschiedene Gebiete mit jeweils konstanter Leitfähigkeit (z. B. Halbkugeln) gibt. Diese Raumbereiche können Sie separat betrachten. Beachten Sie, dass $\vec{E}(r)$ in jedem Bereich identisch ist.

Übungsaufgabe: Der Halbkugelerder



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

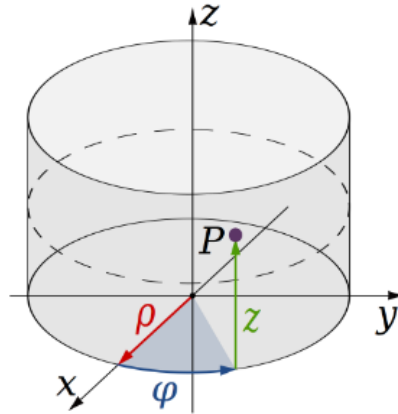
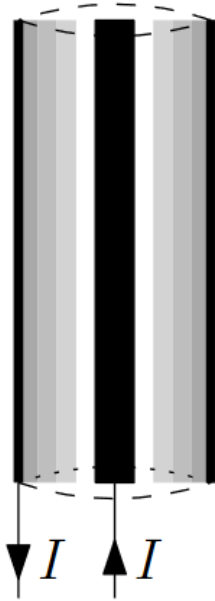
http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a53_7.pdf

https://youtu.be/zKneBbu_Aug



Trainingsaufgaben: Elektrisches Strömungsfeld

$$\kappa = \kappa(\rho)$$



http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Elektrisches_Stroemungsfeld.pdf



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

9.2. Elektrostatik

In der Elektrostatik fließt kein Strom, alle Ladungen bleiben statisch auf ihrer Position. Dass sich gleichartige Ladungen anziehen und gegensätzliche Ladungen abstoßen, können wir uns mit Hilfe von Feldern erklären.

9.2.1. Benötigte Formeln

$$Q = \oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (9.7)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \vec{D} \quad (9.8)$$

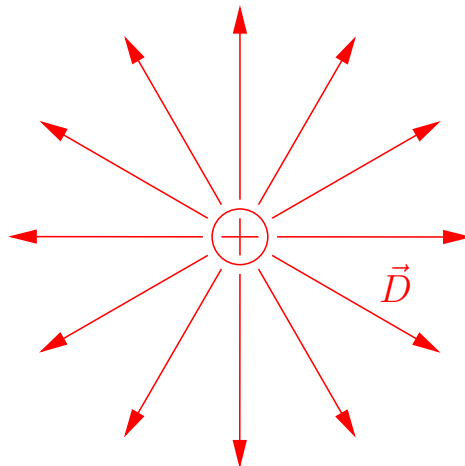
$$U_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (9.9)$$

$$C = \frac{Q}{U} \quad (9.10)$$

Die Bedeutung der Variablen wird in den nächsten Abschnitten erläutert.

Elektrische Ladung und elektrische Flussdichte, Gleichung (9.7)

Wir Ingenieure haben die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ erfunden. (Physiker kommen ohne sie aus und arbeiten nur mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$.) Die $\vec{D}$ -Feldlinien entspringen einer positiven Ladung und enden in einer negativen. Ist keine Gegenladung vorhanden, breiten sich die Feldlinien radial um die Ladung aus und enden im Unendlichen.

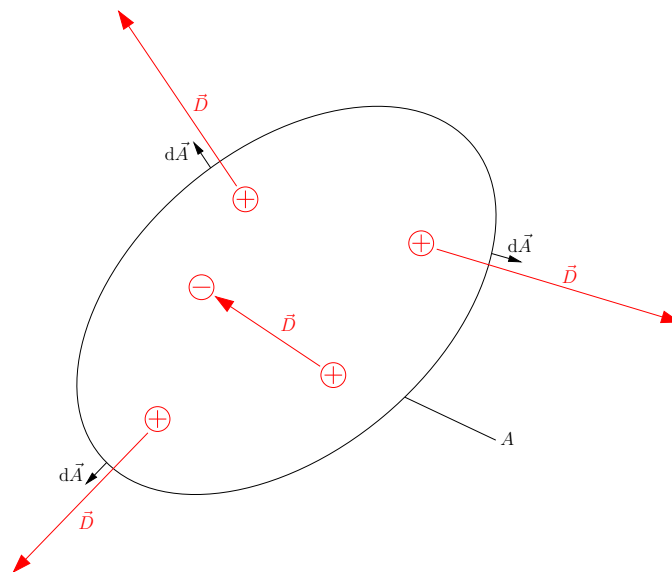


Die Gleichung (9.7) besagt nun das Folgende: Legen wir um eine Ladungsmenge eine in sich geschlossene Hüllfläche (das ist eine Fläche ohne Rand, wie das Leder eines



Fußballs) und integrieren wir über die elektrische Flussdichte, welche durch die Fläche tritt, so entspricht das Ergebnis der Menge der freien Ladungen im von der Hüllfläche eingeschlossenen Volumen.

In der folgenden Abbildung wird dies verdeutlicht. Der Einfachheit halber gehen wir (fälschlicherweise) davon aus, dass jeder positiven Ladung *eine* Feldlinie entspringt und diese in einer negativen Ladung oder im Unendlichen endet. Zählen wir die Anzahl der Feldlinien, welche die eingezeichnete Hüllfläche durchstoßen (es sind drei), so entspricht dies der Anzahl der freien Ladungsträger im Volumen.



Es ist grundsätzlich egal, welche Form die Hüllfläche besitzt. Es bietet sich jedoch an, die Fläche so zu wählen, dass sie von den Feldlinien senkrecht durchstoßen wird. Hierfür gilt die selbe Argumentation wie bei dem elektrischen Strömungsfeld.

Elektrische Flussdichte und elektrische Feldstärke, Gleichung (9.8)

Die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ ist über die Materialeigenschaften des Mediums mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ verknüpft. Hierbei ist $\epsilon_0 = 8,8541878... \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ die Dielektrische Feldkonstante des freien Raums und ϵ_r die relative Permittivität. Für den freien Raum ist $\epsilon_r = 1$, für Materie gilt $\epsilon_r > 1$.

Elektrische Spannung und elektrische Feldstärke, Gleichung (9.9)

Hierbei handelt es sich um die selbe Formel wie wir sie bereits vom elektrischen Strömungsfeld her kennen.



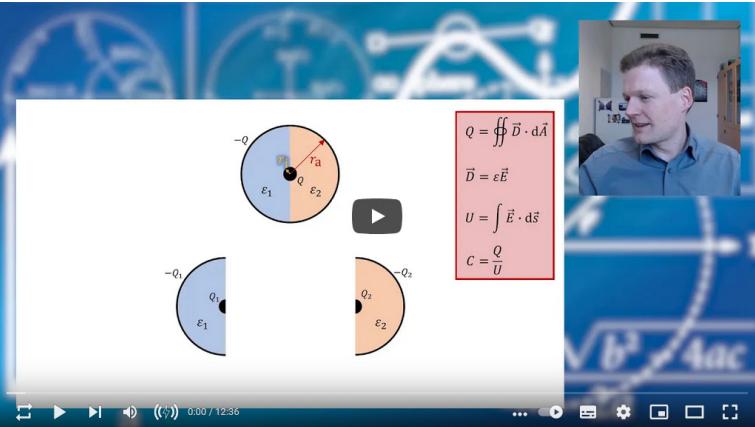
Die Kapazität

Die Kapazität C eines Kondensators (oder einer kapazitiven Anordnung) ist definiert über die Ladungsmenge Q , welche auf einer Kondensatorplatte gespeichert ist, wenn die Spannung U zwischen den Platten abfällt.

9.2.2. Beispiele

Grundsätzlich verhalten sich Aufgabenstellung zur Elektrostatik absolut genauso wie solche zum elektrischen Strömungsfeld. Darum sollen hier nur zwei kurze Beispiele ohne Rechnung angeführt werden.

Kapazität eines Kugelkondensators mit mehreren Dielektrika

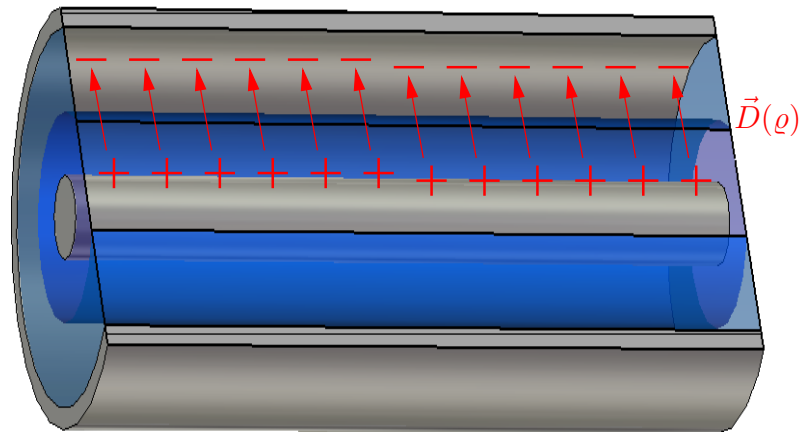


https://youtu.be/Zv_EwVr0-S8

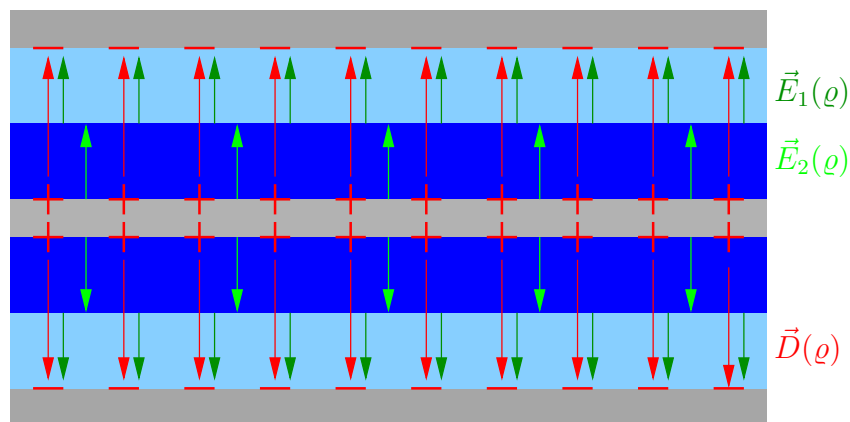
Beispiel 1: Zylinderkondensator mit radial geschichteten Dielektrika

Zwischen dem Innen- und dem Außenleiter eines Zylinderkondensators befinden sich zwei verschiedene Dielektrika, welche radial geschichtet sind. Das äußere Dielektrikum besitzt eine geringere Permittivität, als das innere. Der Kondensator sei geladen, das bedeutet, es befindet sich auf der inneren Elektrode die Ladungsmenge Q , auf der äußeren $-Q$. Aufgrund der Geometriebedingungen gibt es für die Ladungen keinen Grund, sich nicht gleichmäßig auf den Elektrodenflächen zu verteilen. In Folge dessen wird auch die elektrische Flussdichte nur von Radius ϱ abhängen.





Der Betrag der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ wird sich jedoch laut Gleichung (9.8) an der Grenzfläche sprunghaft ändern.

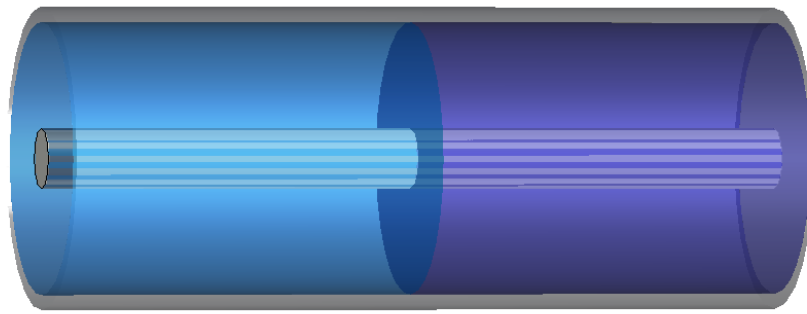


Beispiel 2: Zylinderkondensator mit axial geschichteten Dielektrika

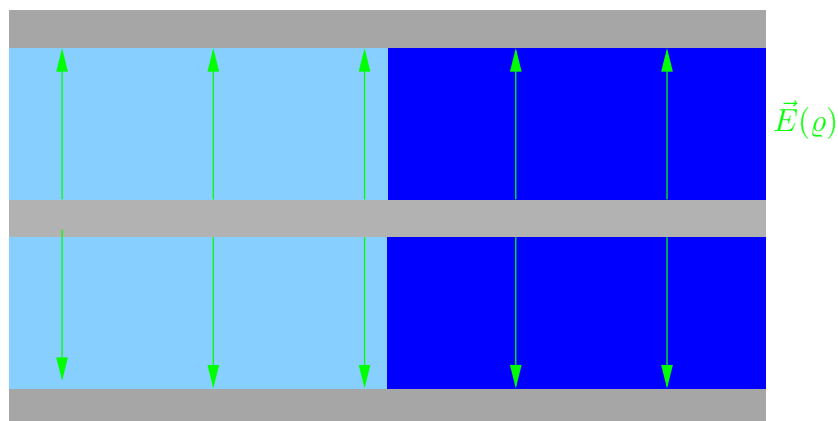
Anders verhält es sich, wenn sich das Dielektrikum in axialer Richtung ändert.



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

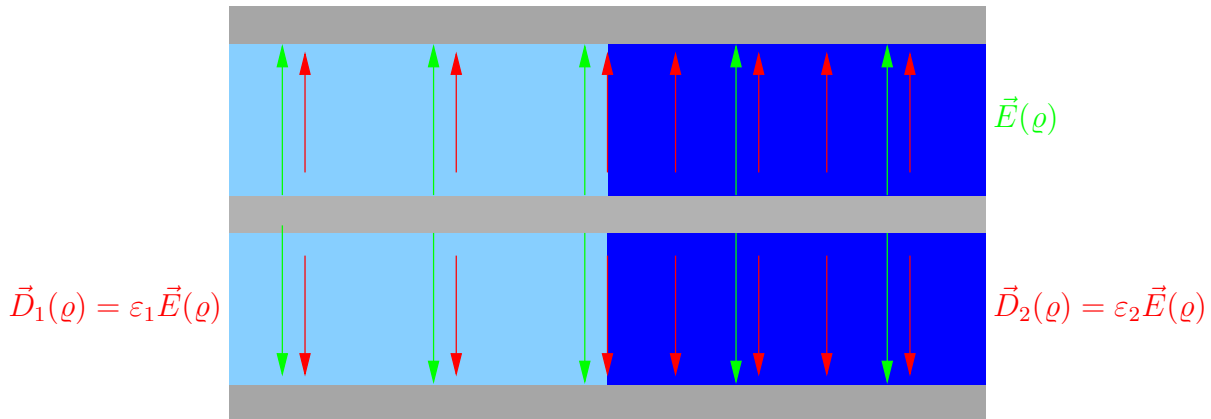


Zwischen den Kondensatorplatten liegt aufgrund der Ladung eine konstante Spannung an. Egal in welchem Medium die Gleichung (9.9) angewendet wird, muss das Ergebnis identisch sein. Dies bedeutet, dass die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ in beiden Medien identisch sein muss.

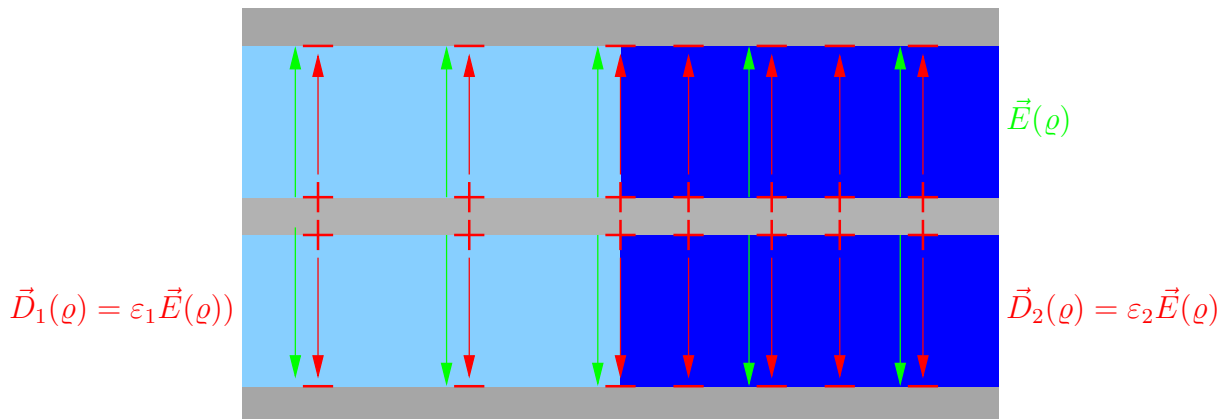


Aus Gleichung (9.8) folgt, dass sich die elektrische Flussdichte in beiden Raumbereichen unterscheiden muss.

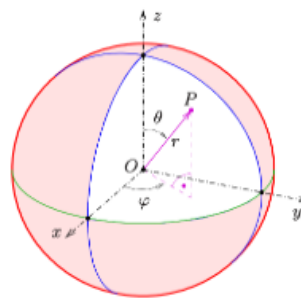
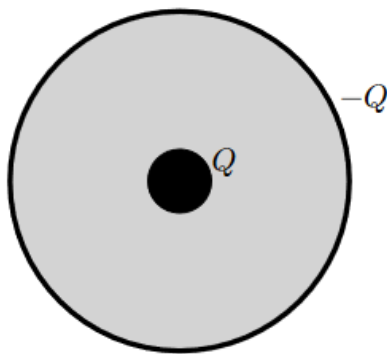




Dies wiederum bedeutet, dass sich die Ladungen asymmetrisch auf den Elektroden des Kondensators anordnen.



Trainingsaufgaben: Elektrostatik

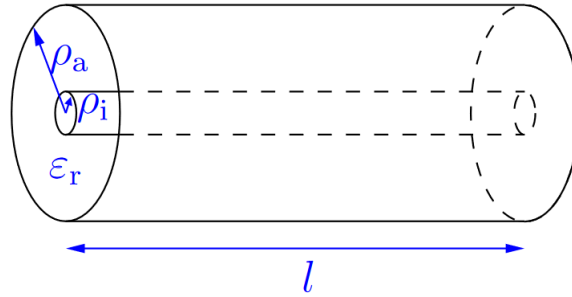


http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Elektrostatik.pdf



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Übungsaufgabe: Kapazität eines Zylinderkondensators



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

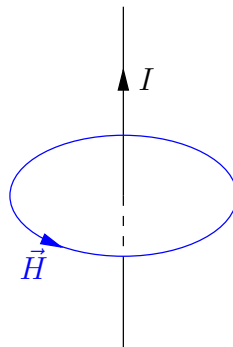
http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aElektrostatik_Zylinder_1.pdf
<https://youtu.be/5ZzioJRtx4w>



10. Magnetische Felder

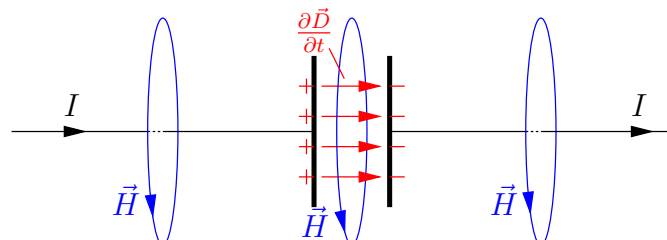
10.1. Magnetisches Feld um einen stromdurchflossenen Leiter

Aus dem Schul-Physikunterricht ist bekannt, dass sich um einen stromdurchflossenen Leiter ein magnetisches Feld $\vec{H}$ ausbildet. Die Feldlinien von $\vec{H}$ sind hierbei konzentrische Kreise um den Leiter, die Orientierung des Feldes lässt sich mit der „Rechte-Hand-Regel“ bestimmen: Der Daumen der rechten Hand zeigt in die Richtung des Stroms, die Finger zeigen in die Richtung des Feldes.



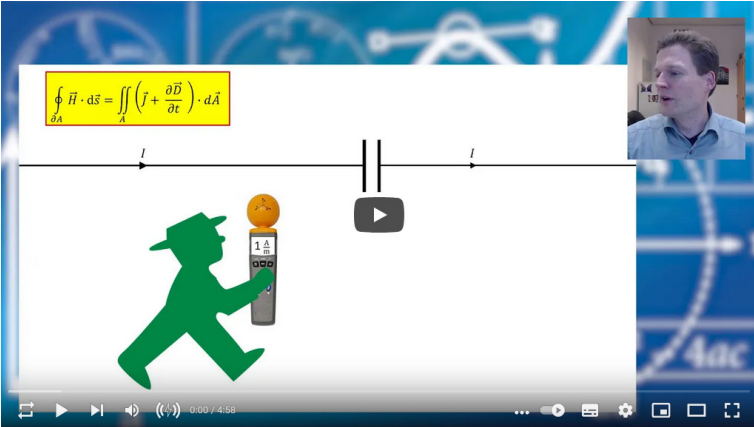
Wir stellen uns nun vor, wir hätten einen Leiter, durch den ein Gleichstrom fließt. Mit einer H-Feldsonde können wir die magnetische Feldstärke messen. Wir stellen fest, dass der Betrag von $\vec{H}$ nur vom Abstand zum Leiter abhängt. Nun fügen wir einen Plattenkondensator in die Leitung ein. Da auf der Leitung ein Gleichstrom fließt, wird der Kondensator stetig geladen. Das bedeutet, dass sich eine Platte stetig positiv auflädt, die andere negativ. Die Ladungsdifferenz hat eine elektrische Flussdichte $\vec{D}$ zur Folge, welche stetig zunimmt.

Die verblüffende Beobachtung, die wir machen können ist, dass wir mit der H-Feldsonde nicht in der Lage sind, die Position des Kondensators zu bestimmen! Das magnetische Feld in der Nähe des stromdurchflossenen Leiters ist genauso groß wie neben der sich aufbauenden elektrischen Flussdichte!



Dies führt uns zur allgemeinen Form des Durchflutungsgesetzes.

Das Durchflutungsgesetz



<https://www.youtube.com/watch?v=oh1Z2jc5k0E>

Durchflutungsgesetz:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \\
 &= \underbrace{\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}_{\text{Durchflutung } \Theta} + \frac{d}{dt} \underbrace{\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\substack{\text{el. Fluss } \Psi \\ \text{Verschiebungsstrom}}} \\
 &= \Theta + \frac{d\Psi}{dt}
 \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung ist ein geschlossenes Wegintegral. Das bedeutet, dass man am Ende des Integrationsweges wieder am Startpunkt ankommt. Dieser geschlossene Weg umspannt eine Fläche A . Über diese Fläche wird auf der rechten Seite der Gleichung integriert.

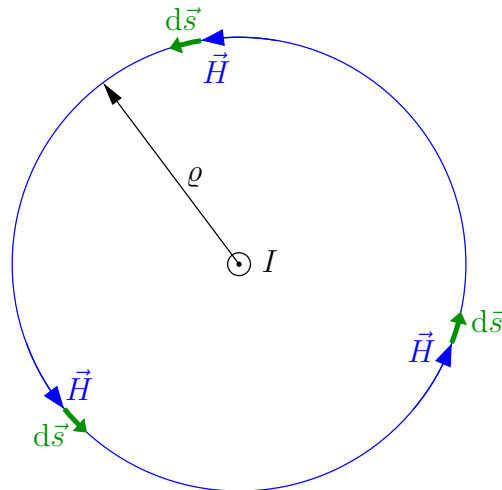
Den Term $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ habe ich hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt. In der Regel möchten wir nicht das magnetische Feld um einen Kondensator berechnen. Der besagte Term



wird erst in der Hochfrequenztechnik interessant. Um das magnetische Feld um einen stromdurchflossenen Leiter zu berechnen, genügt die Formel

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Wir werten zunächst die linke Seite aus. Hierfür wählen wir einen Integrationsweg entlang einer Feldlinie, also einen konzentrischen Kreis um den Leiter.



An jedem Ort entlang des Weges gilt $\vec{H} \parallel d\vec{s}$. Daraus folgt, dass das Ergebnis des Skalarprodukts das Produkt der Beträge ergibt: $\vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot ds$.

Da der Integrationsweg einen konstanten Abstand ϱ zum Leiter besitzt, wird sich der Betrag von H entlang des Weges nicht ändern. Es gilt also:

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial A} H \cdot ds = H \cdot \oint_{\partial A} ds$$

Das Integral $\oint_{\partial A} ds$ ergibt die Länge des Integrationsweges:

$$H \cdot \oint_{\partial A} ds = H \cdot 2\pi\varrho.$$

Da wir eine Feldlinie außerhalb des Leiters betrachten, gilt

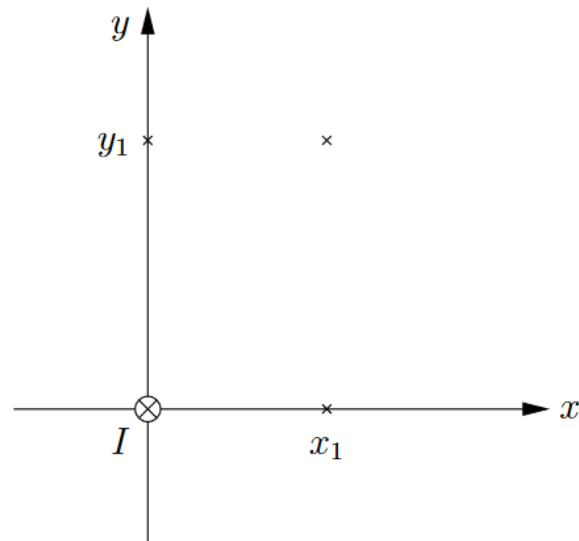
$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = I.$$

Es gilt also $H \cdot 2\pi\varrho = I$. Somit erhalten wir den Betrag des magnetischen Feldes im Abstand ϱ zu einem vom Strom I durchflossenen Leiter:

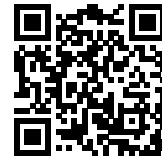
$$H = \frac{I}{2\pi\varrho}.$$



Übungsaufgabe: Magnetisches Feld um einen Linienleiter auf der z-Achse



Aufgabenblatt



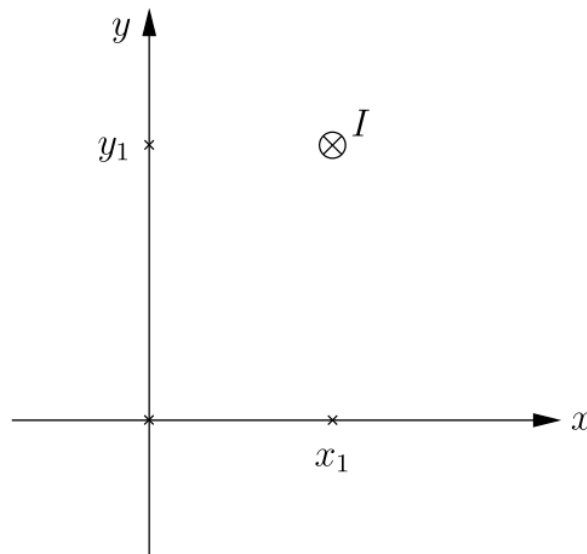
Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aMagFeld_2.pdf

https://youtu.be/_8fCg-rlvi0



Übungsaufgabe: Magnetisches Feld um einen Linienleiter parallel zur z-Achse



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aMagFeld_3.pdf
https://youtu.be/_Vy6PMjt8Ok

10.2. Magnetisches Feld *in* einem stromdurchflossenen Leiter

Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes möchten wir nun ausrechnen, wie groß die magnetische Feldstärke H innerhalb des Leiters ist. Hierfür nehmen wir an, dass der Leiterquerschnitt den Radius R besitzt und von einem Strom I durchflossen wird.

Die linke Seite des Durchflutungsgesetzes können wir vollkommen analog wie oben betrachten:

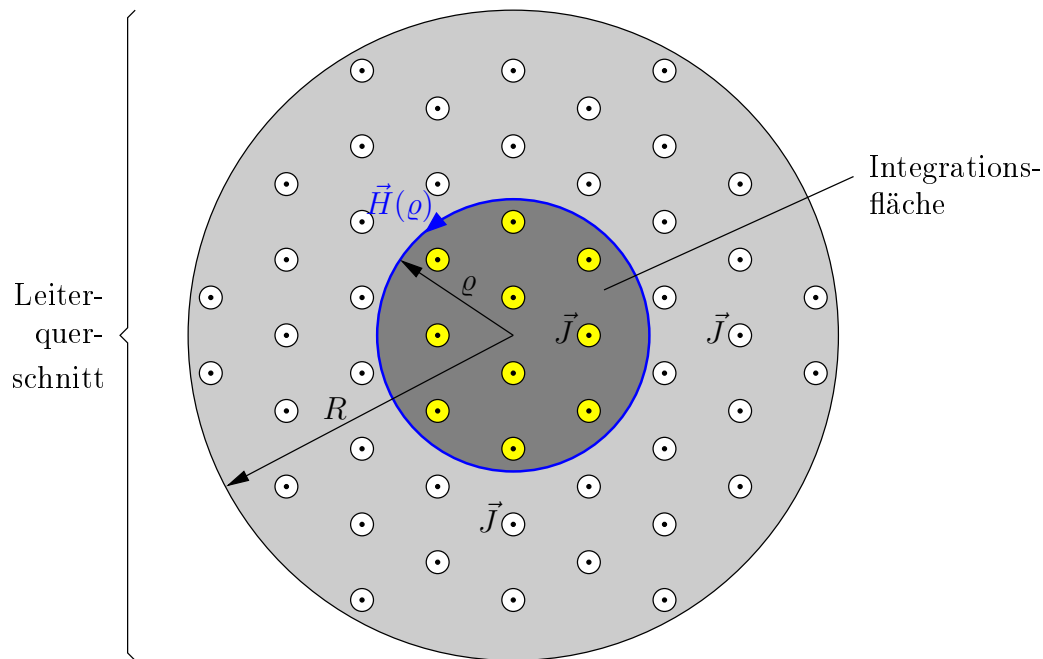
$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial A} H \cdot ds = H \cdot \oint_{\partial A} ds = H \cdot 2\pi \varrho.$$

Die rechte Seite erfordert mehr Überlegungen. Zunächst benötigen wir für die Formel die Stromdichte $\vec{J}$. Wir gehen davon aus, dass sich der Strom I gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt. Somit gilt $J = \frac{I}{\pi R^2}$. Wir integrieren jedoch nur über jene Fläche, die von der betrachteten $\vec{H}$ -Feldlinie umschlossen wird.

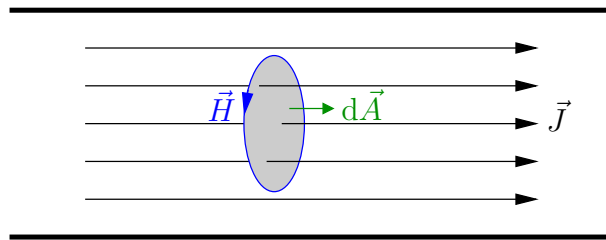


Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.

Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.



Hierbei liegt die Fläche senkrecht zu der Stromdichte, der Flächennormalenvektor $d\vec{A}$ ist also parallel zu $\vec{J}$.



Es gilt also

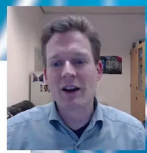
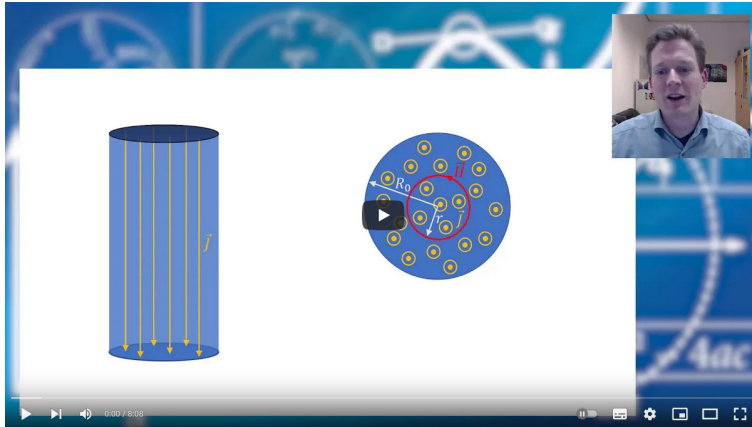
$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iint_A J \cdot dA = \iint_A \frac{I}{\pi R^2} \cdot dA = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \iint_A dA = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi \varrho^2.$$

Nun fassen wir die beiden Seiten zusammen:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ \rightarrow H \cdot 2\pi \varrho &= \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi \varrho^2 \\ \Rightarrow H &= \frac{I}{2\pi R^2} \cdot \varrho \quad \text{für } \varrho \leq R. \end{aligned}$$

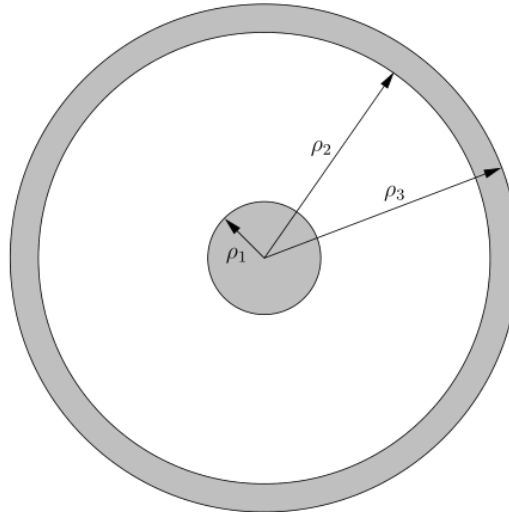


Magnetische Feldstärke in und um einen stromdurchflossenen Leiter



<https://www.youtube.com/watch?v=Tac3dPO0q10>

Übungsaufgabe: Magnetisches Feld in einem Koaxialleiter



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aDurchflutung_1.pdf

<https://youtu.be/7Fxr6IKYjNA>



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

10.3. Magnetische Flussdichte

Wir haben bereits kennengelernt, dass das magnetische Feld $\vec{H}$ von einem elektrischen Strom verursacht wird. Wenn wir den Einfluss von Materie auf magnetische Phänomene analysieren möchten, vereinfacht es die Berechnungen, wenn wir eine zweite Feldgröße einführen: Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ ¹. Im freien Raum gilt der Zusammenhang

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

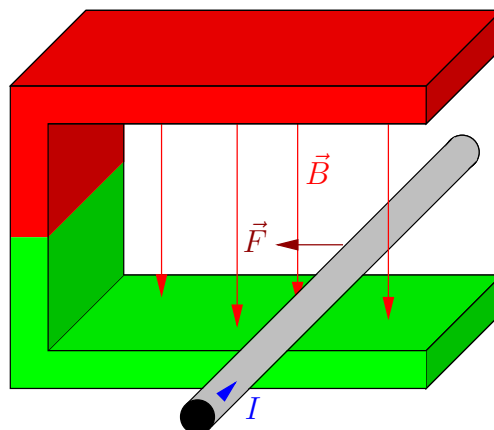
Hierbei ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ die magnetische Feldkonstante.

10.3.1. Magnetische Kraft auf stromdurchflossene Leiter

Befindet sich ein stromdurchflossener Leiter im Feld eines Hufeisenmagneten, so wirkt auf ihn die (Lorenz-)Kraft $\vec{F}$, welche sowohl senkrecht auf der Richtung des Stromflusses $\vec{I}$ als auch senkrecht auf der Richtung der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ steht:

$$\vec{F} = l \cdot \vec{I} \times \vec{B}.$$

Hierbei ist l die Länge des Leiterstücks, das sich im Feld des Magneten befindet.



Man kann die Lorentzkraft auch für eine einzelne Ladung Q angeben, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein magnetisches Feld bewegt:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Wir nutzen also die Größe „magnetische Flussdichte $\vec{B}$ “, um die Kraftwirkung auf bewegte Ladungen zu beschreiben, während die „magnetische Feldstärke $\vec{H}$ “ jene Feldgröße darstellt, die von elektrischen Strömen in Leitern verursacht wird.

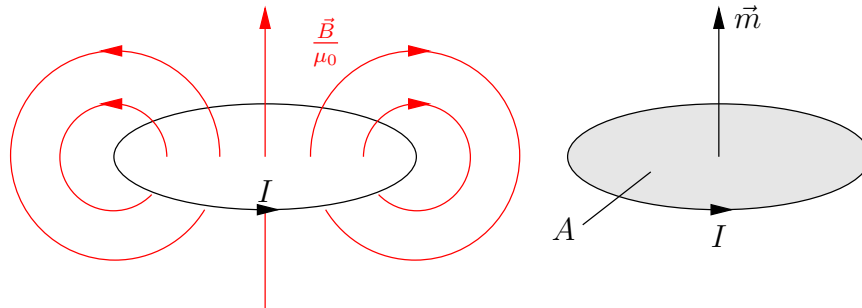
¹Analog zum elektrischen Feld $\vec{E}$ und der elektrischen Flussdichte $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$.



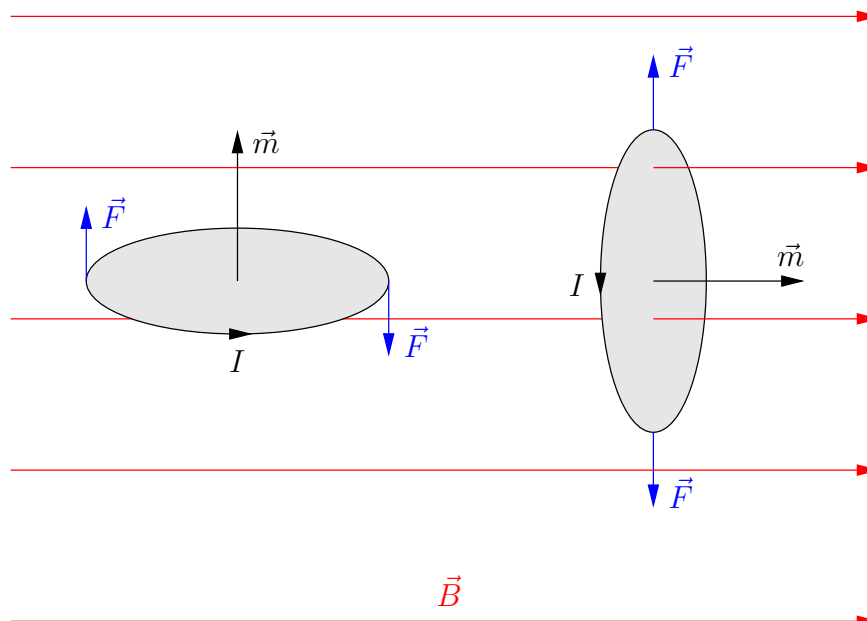
10.3.2. Magnetisierbare Materialien

Im Folgenden werden wir betrachten, was im Inneren von Materialien passiert, die wir umgangssprachlich „magnetisch“ nennen. Hierfür müssen wir zunächst den magnetischen Dipol einführen.

Wir betrachten einen Strom I , der im Kreis um eine (kleine) Fläche A fließt. Der Strom erzeugt eine magnetische Flussdichte $\vec{B}$, welche den links skizzierten Verlauf aufweist:

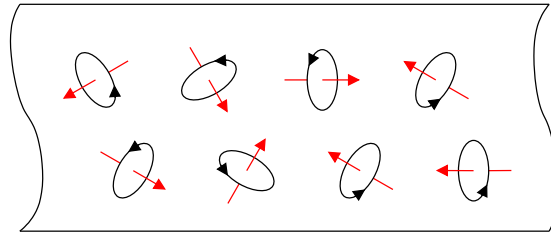


Nun definieren wir eine neue Größe: Das magnetische Moment $\vec{m}$. Sein Betrag berechnet sich mit $m = AI$ und seine Richtung kann mit der Rechte-Hand-Regel bestimmt werden: Der Daumen zeigt in Richtung $\vec{m}$ und die Finger in Richtung von I . Auf den Kreisstrom I wirkt im Magnetfeld $\vec{B}$ eine Kraft, die dazu führt, dass sich der Dipol zum Feld ausrichtet.

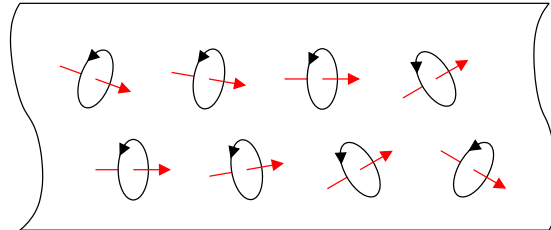


In einem magnetisierbaren Material sind viele solcher Kreisströme zu finden. Es handelt sich um die Elektronen, die sich auf Kreisbahnen um die Atomkerne bewegen. Im Physikunterricht in der Schule haben wir sie Elementarmagneten genannt. In einem unmagnetisierten Medium sind die magnetischen Dipole ungeordnet und ihre magnetischen Felder heben sich gegenseitig auf.





Wird das Medium nun durch ein äußeres Feld magnetisiert, richten sich die Dipole aus.



Um unterschiedliche Materialien charakterisieren zu können, führen wir die Magnetisierung $\vec{M}$ ein, welche das magnetische Moment mit der Anzahl N der Dipole pro Volumen V gewichtet:

$$\vec{M} = \frac{N}{V} \vec{m}.$$

Im magnetisierbaren Medium gilt also²

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}).$$

Da sich die Dipole nach dem äußeren (vom Leitungsstrom erzeugten) Feld ausrichten, gilt

$$\vec{M} = \chi \vec{H},$$

wobei χ die (dimensionslose) magnetische Suszeptibilität genannt wird. Für ein **lineares und isotropes**³ Medium gilt nun

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \chi \vec{H}) \\ &= \mu_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\mu_r} \vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{aligned}$$

Polarisationsarten

Je nach Größe von χ unterscheidet man zwischen

1. Paramagnetismus ($0 < \chi \ll 1$; $\mu_r > 1$),
2. Diamagnetismus ($\chi < 0$, $|\chi| \ll 1$; $\mu_r < 1$) und
3. Ferromagnetismus ($\chi \gg 1$; $\mu_r \gg 1$).

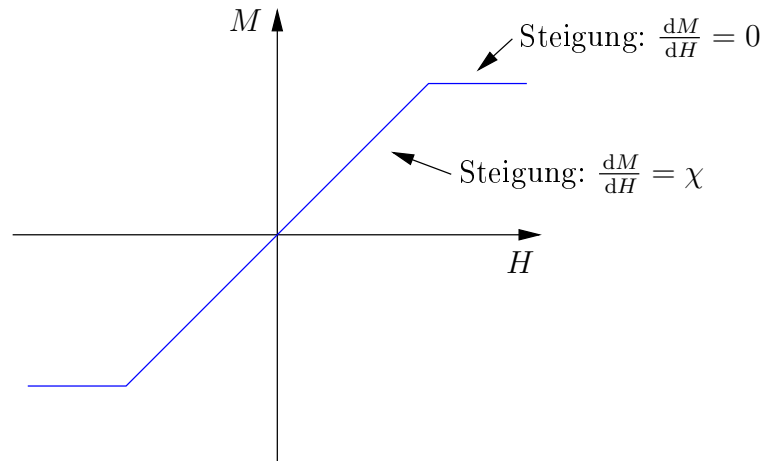
²Die Herleitung ist in Anhang A.1 zu finden.

³isotrop bedeutet richtungsunabhängig

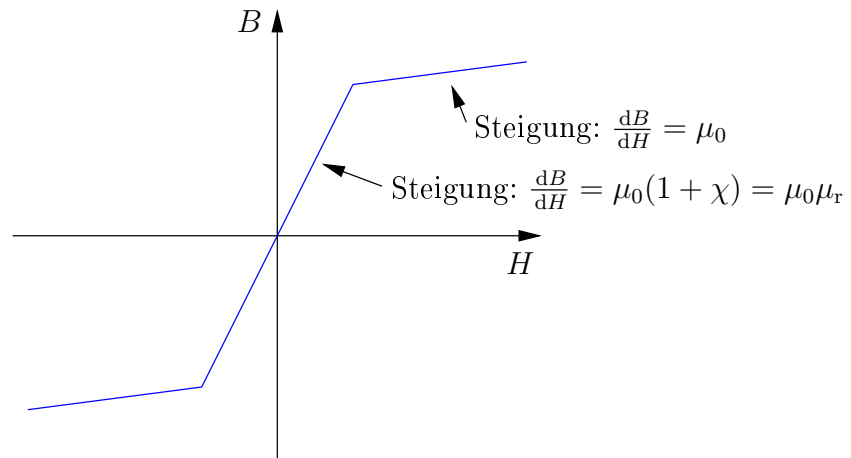


Sättigung magnetischer Materialien

Der Betrag der Magnetisierung $\vec{M}$ nimmt bei steigender magnetischer Feldstärke $\vec{H}$ zu: $\vec{M} = \chi \vec{H}$. Jedoch sind irgendwann alle magnetischen Dipole ausgerichtet, so dass die Magnetisierung nicht weiter ansteigen kann.



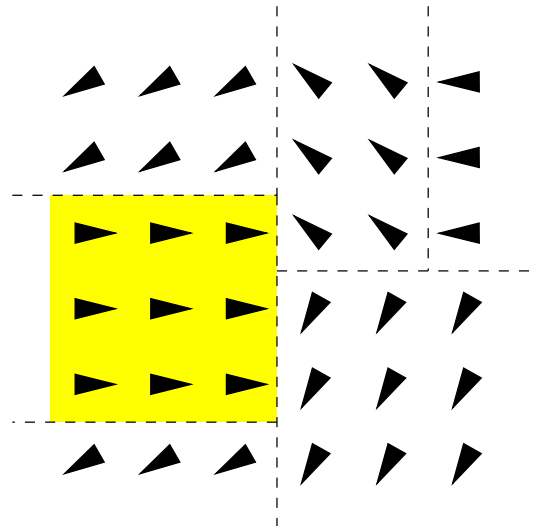
Für die magnetische Flussdichte $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ bedeutet dies, dass sie bei zunehmender magnetischer Feldstärke H zunächst stark ansteigt, jedoch nach Erreichen der Sättigung der Flussdichtezuwachs bei weiter zunehmenden H -Feld nicht größer ist als im Vakuum.



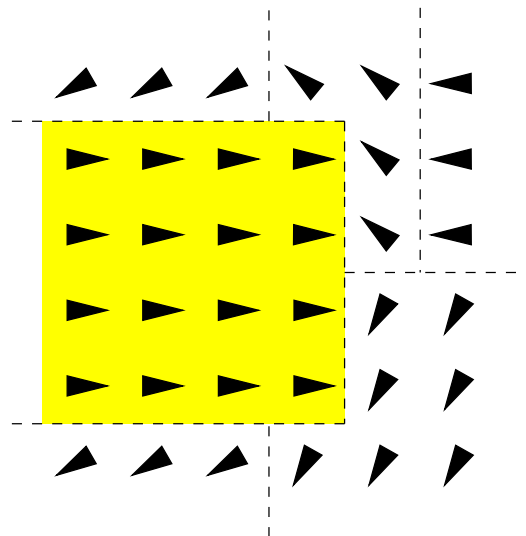
Eigenschaften ferromagnetischer Materialien

In ferromagnetischen Materialien sind die magnetischen Dipole nicht unabhängig voneinander ausgerichtet, sondern innerhalb der *Weiß'schen Bezirke* jeweils identisch ausgerichtet. Diese Bezirke werden von den *Blochwänden* begrenzt. Im unmagnetisierten Medium heben sich die Felder der einzelnen Bezirke auf.



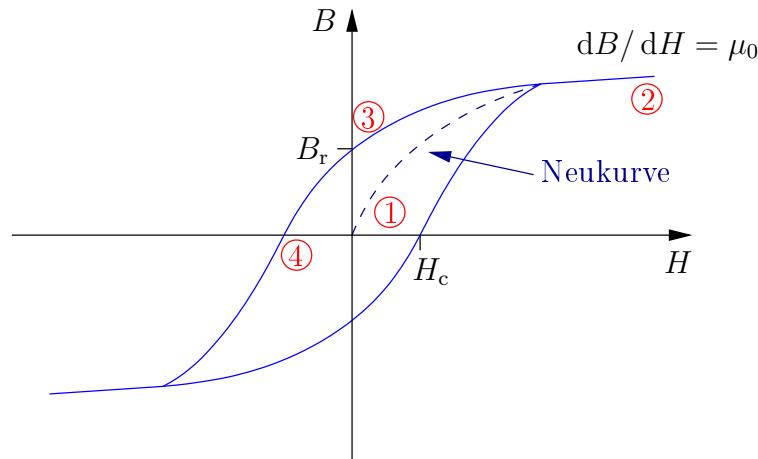


Legt man nun ein äußeres magnetisches Feld an, so verschieben sich die Grenzen der Blochwände schlagartig, das heißt die Magnetisierung $\vec{M}$ ändert in einigen Raumbe-
reichen plötzlich ihre Richtung. Bei *weichmagnetischen Materialien* ist dieser Effekt
(mehr oder weniger) reversibel. In *hartmagnetischen Materialien* hingegen verharren
die Blochwände an ihrer neuen Position.



Auch nach Abschalten des äußeren H -Feldes bleibt dann die *Remanenzflussdichte* be-
stehen; das Material ist magnetisiert, wir haben einen Permanentmagneten gebaut.





Diesen Effekt nennt man **Hysterese**. Die oben stehende Hysteresekurve zeigt, wie das zunächst unmagnetisierte Material ($H = 0$, $B = 0$) durch ein äußeres H -Feld in Sättigung gebracht wird ①→②. Schaltet man das H -Feld ab, so reduziert sich die Flussdichte, jedoch geht sich nicht auf Null sondern nur bis zur Remanenzflussdichte B_r zurück ③. Um das Material zu entmagnetisieren, muss man die Koerzitivfeldstärke H_c in entgegengesetzter Richtung anlegen ④.

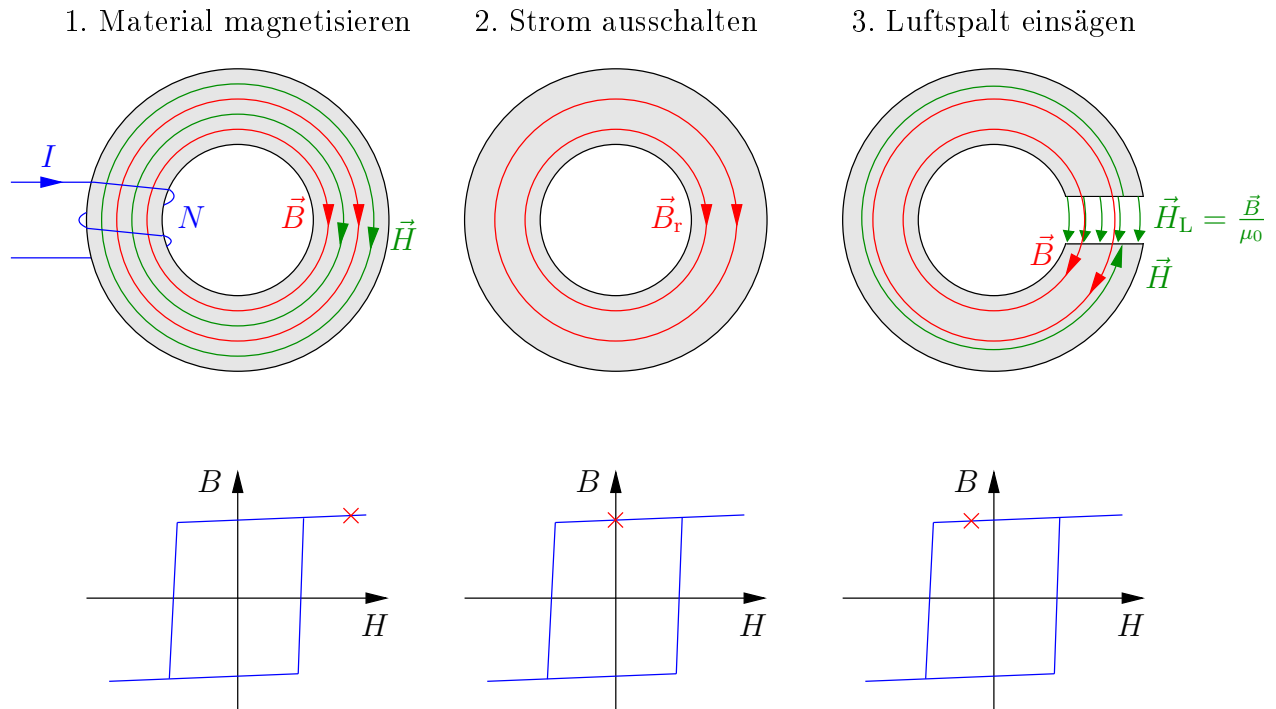
In technischen Anwendungen (z. B. bei Transformatoren) nutzt man sinusförmige Wechselströme, um den magnetischen Fluss im Kern zu erzeugen (hierbei vermeidet man es, den Kern bis in die Sättigung zu bringen, um einen möglichst linearen Zusammenhang zwischen H und B zu behalten). Bei unserem 50 Hz Stromnetz wird die Hystereseschleife also 50 mal pro Sekunde durchlaufen. Darum verwendet man für Trafos weichmagnetische Materialien mit einer möglichst schmalen Hysteresekurve, denn im Kernmaterial treten magnetische Ummagnetisierungsverluste auf, welche proportional zu der Fläche der Hystereseschleife sind.

Magnetisches Feld und magnetische Flussdichte in ferromagnetischen Materialien

In ferromagnetischen Materialien **gilt leider NICHT** die einfache Beziehung $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$! Dies soll an einem anschaulichen Beispiel verdeutlicht werden.

Wir nehmen einen Torus aus einem hartmagnetischen Werkstoff und magnetisieren ihn mit Hilfe einer stromdurchflossenen Spule (Strom I und N Windungen) bis in die Sättigung (siehe links).





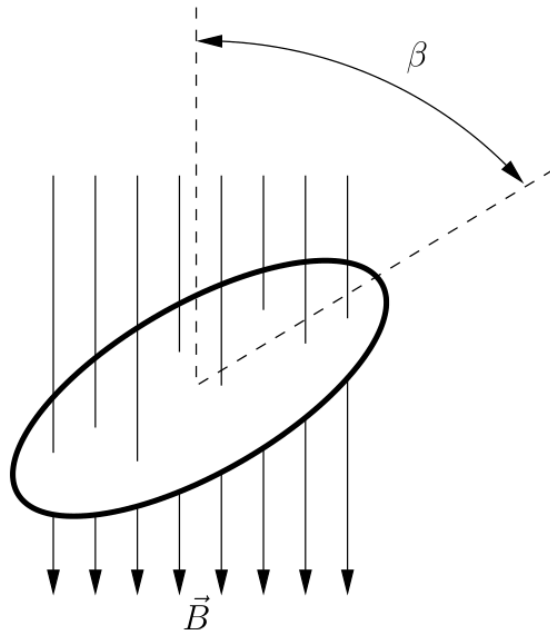
Sowohl magnetische Flussdichte $\vec{B}$ als auch Feldstärke $\vec{H}$ sind positiv, wie man an der Hysteresekurve ablesen kann. Für die Feldstärke gilt $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot I$.

Nun schalten wir den Strom ab. Das hartmagnetische Material behält seinen Remanenzfluss B_r bei (siehe mittlere Skizze). Die magnetische Feldstärke wird jedoch Null, denn nun gilt $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$.

Schließlich sägen wir einen Luftspalt in das magnetisierte Material. An B ändert sich im Material nichts, und das Feld setzt sich auch im Luftspalt fort. Hier muss $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ gelten, gleichzeitig jedoch weiterhin $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$, denn nach wie vor fließt ja kein externer Strom mehr. Damit das geschlossene Wegintegral über die magnetische Feldstärke Null wird, muss auch im Kernmaterial ein H -Feld vorhanden sein. Dieses Feld muss negativ sein (also in die entgegengesetzte Richtung zeigen). Auf der rechten Hysteresekurve erkennt man, dass sich der Arbeitspunkt hierfür nur leicht verschieben musste.

Wir haben also gesehen, dass innerhalb eines ferromagnetischen Materials kein linearer Zusammenhang zwischen $\vec{H}$ und $\vec{B}$ besteht, die Feldgrößen sogar in unterschiedliche Richtungen zeigen können!



Übungsaufgabe: Magnetischer Fluss durch Leiterschleife


Aufgabenblatt



Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a61_3.pdf
<https://youtu.be/LQZXyu8S2OA>

10.4. Magnetischer Kreis

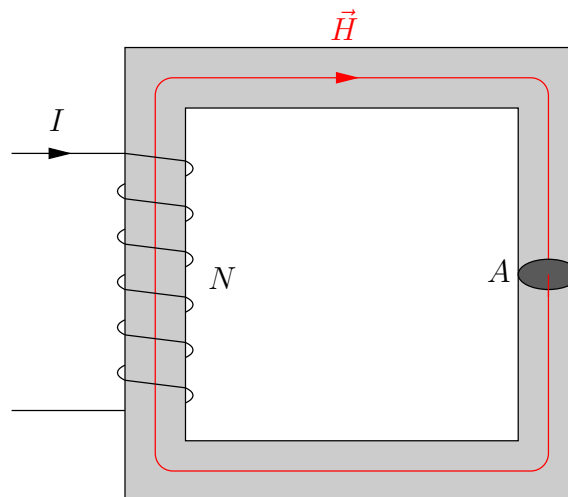
Ferromagnetische Materialien werden technisch genutzt, um z. B. Induktivitäten, Elektromagneten oder Transformatoren zu bauen. Natürlich könnte man das Verhalten dieser Bauelemente und Bauteile mit Hilfe der Feldtheorie berechnen. Da dies jedoch recht aufwändig ist, werden wir im Folgenden eine magnetische Anwendung in ein elektrisches Ersatzschaltbild überführen, welches wir mit den bekannten Methoden für Netzwerke analysieren können.

Gegeben ist ein Eisenkern mit der mittleren Länge l und der Querschnittsfläche A . Das Material wird vereinfacht als linear angesehen und besitzt eine hohe Permeabilität $\mu = \mu_0 \mu_r$. Er ist von einer Spule mit N Windungen umwickelt, durch die der Strom I fließt.



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.

Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.



Der Strom verursacht ein magnetisches Feld $\vec{H}$. Wir betrachten nun eine Feldlinie, die komplett im Eisenkern geführt wird.

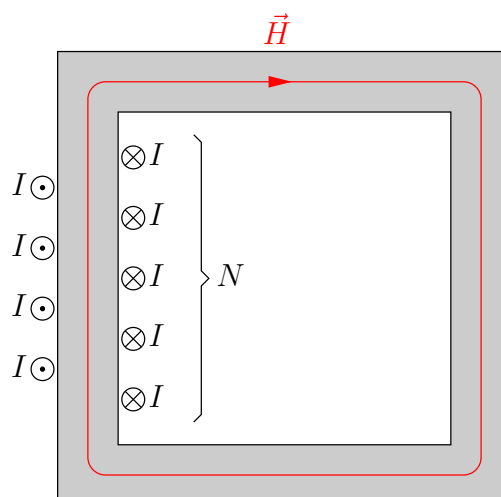
Wir vereinfachen nun das Durchflutungsgesetz:

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Linke Seite: Wir nehmen an, dass das $\vec{H}$ -Feld im Eisenkern homogen, also nicht vom Ort abhängig ist. Für die Länge des Integrationsweges wählen wir vereinfacht die mittlere Länge l des Eisenkerns.

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot l.$$

Rechte Seite: Wir müssen die Ströme aufsummieren, die von einer $\vec{H}$ -Kennlinie eingeschlossen werden. Betrachten wir ein Schnittbild des Eisenkerns:



Wir erkennen, dass eine $\vec{H}$ -Feldlinie den Strom $N \cdot I$ einschließt. Es gilt also

$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = N \cdot I.$$

Das Durchflutungsgesetz vereinfacht sich also zu

$$H \cdot l = N \cdot I.$$

Das Produkt $N \cdot I$ wird auch magnetische Durchflutung Θ genannt.

Magnetische Durchflutung:

$$\Theta = N \cdot I$$

Wir möchten nun mit Hilfe der Materialgleichung $\vec{B} = \mu \vec{H}$ die magnetische Flussdichte B im Eisenkern berechnen:

$$\begin{aligned} H \cdot l &= N \cdot I \\ \rightarrow H &= \frac{N \cdot I}{l} \\ \rightarrow B &= \mu_0 \mu_r \frac{N \cdot I}{l} \end{aligned}$$

Da wir vereinfacht annehmen, dass die magnetische Feldstärke H konstant über die Querschnittsfläche A des Eisenkerns ist, gilt dies folglich auch für die magnetische Flussdichte B . Der magnetische Fluss $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$ berechnet sich daher einfach:

$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{l} \cdot A.$$

Mit $N \cdot I = \Theta$ und Umstellen folgt das

Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises

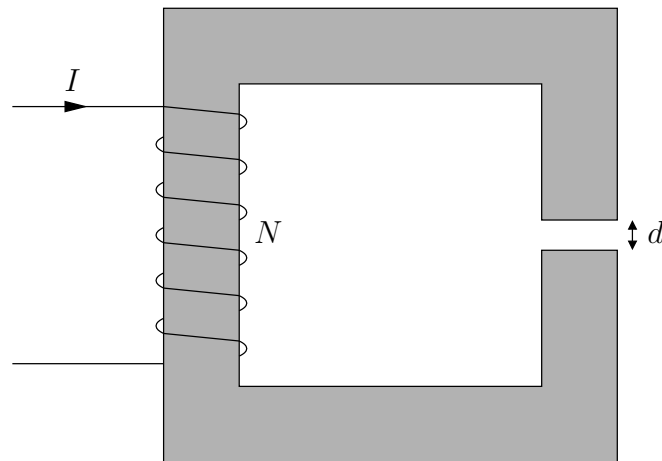
$$\Theta = \underbrace{\frac{l}{\mu_0 \mu_r A}}_{R_m} \cdot \Phi = R_m \cdot \Phi$$

Den Ausdruck $R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$ nennt man *magnetischen Widerstand*.

10.4.1. Elektrisches Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises

Der skizzierte Eisenkern besitzt die mittlere Eisenlänge l und die Querschnittsfläche A . In den Eisenkern wurde ein Luftspalt der Dicke d gesägt. Ein Schenkel ist mit einer Spule mit N Windungen umwickelt, die den Strom I führt. Der Eisenkern besitzt die relative Permeabilität μ_r .





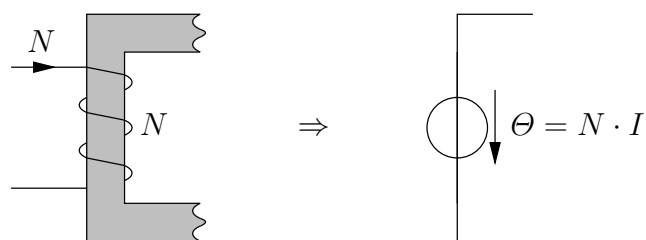
Gesucht ist die magnetische Feldstärke H_L im Luftspalt.

Lösung: Wir berechnen zunächst die magnetischen Widerstände des Eisenkerns $R_{m,E}$ und des Luftspalts $R_{m,L}$:

$$R_{m,E} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A},$$

$$R_{m,L} = \frac{d}{\mu_0 A}.$$

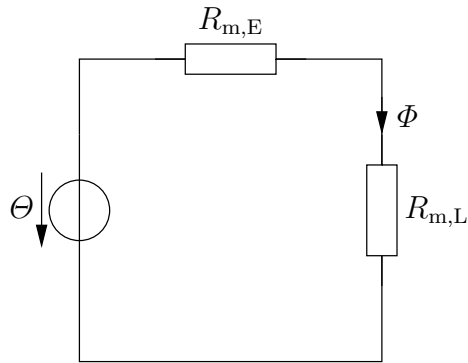
Ein magnetischer Kreis lässt sich in eine äquivalente elektrische Schaltung umzeichnen. Hierbei werden stromdurchflossene Wicklungen zu „Durchflutungsquellen“, welche sich im Ersatzschaltbild wie Spannungsquellen verhalten.



Magnetische Widerstände werden wie Ohmsche Widerstände eingezeichnet und die sich einstellenden Ströme im Ersatzschaltbild entsprechen den magnetischen Flüssen Φ im Eisenkreis.

Das Ersatzschaltbild sieht also wie folgt aus:





nach dem Ohmschen Gesetz des magnetischen Kreises lässt sich der magnetische Fluss nun einfach berechnen:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{m,E} + R_{m,L}}$$

Da wir beim magnetischen Kreis von homogener Feldverteilung ausgehen, folgt für die magnetische Flussdichte

$$B = \frac{\Phi}{A}.$$

Die gesuchte magnetische Feldstärke im Luftspalt beträgt also

$$H = \frac{B}{\mu_0}.$$

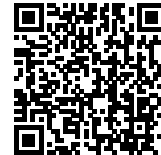
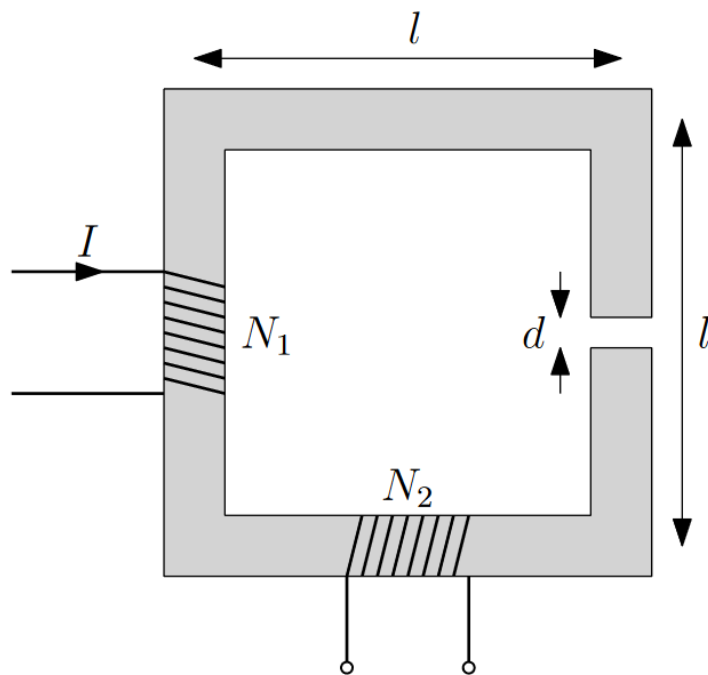
Der magnetische Kreis

Mittlere Länge: l
 Querschnittsfläche: A
 Relative Permeabilität: μ_r

<https://youtu.be/nNhOLmXFoRU>

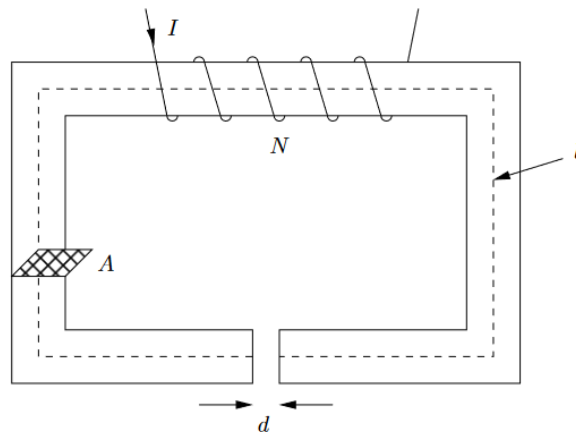


Trainingsaufgaben: Magnetischer Kreis



http://stefan-schenke.de/get/challenges/Training_Magnetischer_Kreis.pdf

Übungsaufgabe: einfacher magnetischer Kreis



Aufgabenblatt

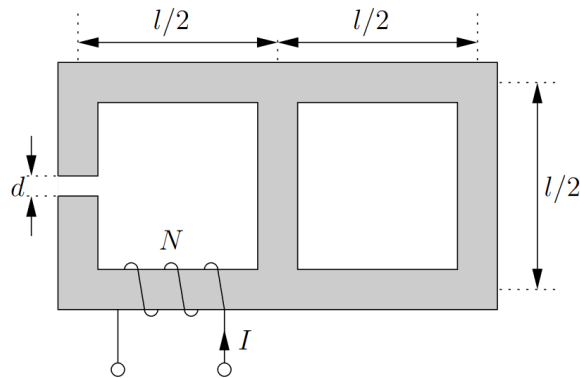


Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aMagnetischer_Kreis_1.pdf
https://youtu.be/rPLCQhE_L8E



Übungsaufgabe: Magnetischer Kreis



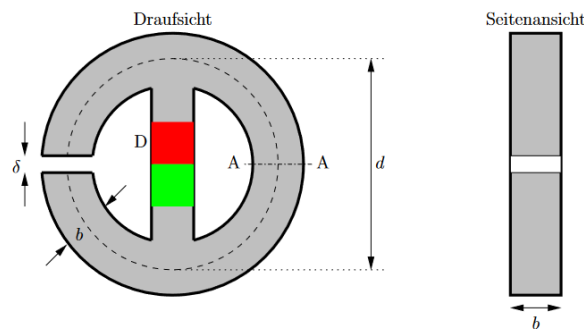
Aufgabenblatt



Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aMagnetischer_Kreis_4.pdf
<https://youtu.be/f8hMtMLAY5I>

Übungsaufgabe: Magnetischer Kreis mit Permanentmagnet



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a61_4.pdf
<https://youtu.be/OzACiRme6hE>

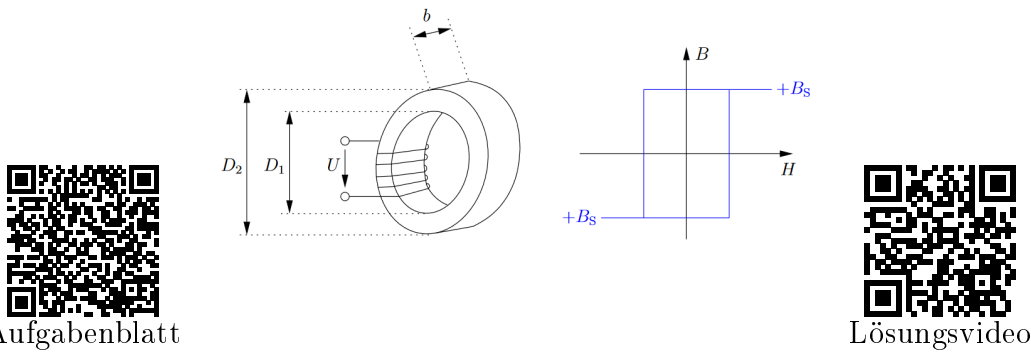


Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

10.5. Induktionsgesetz

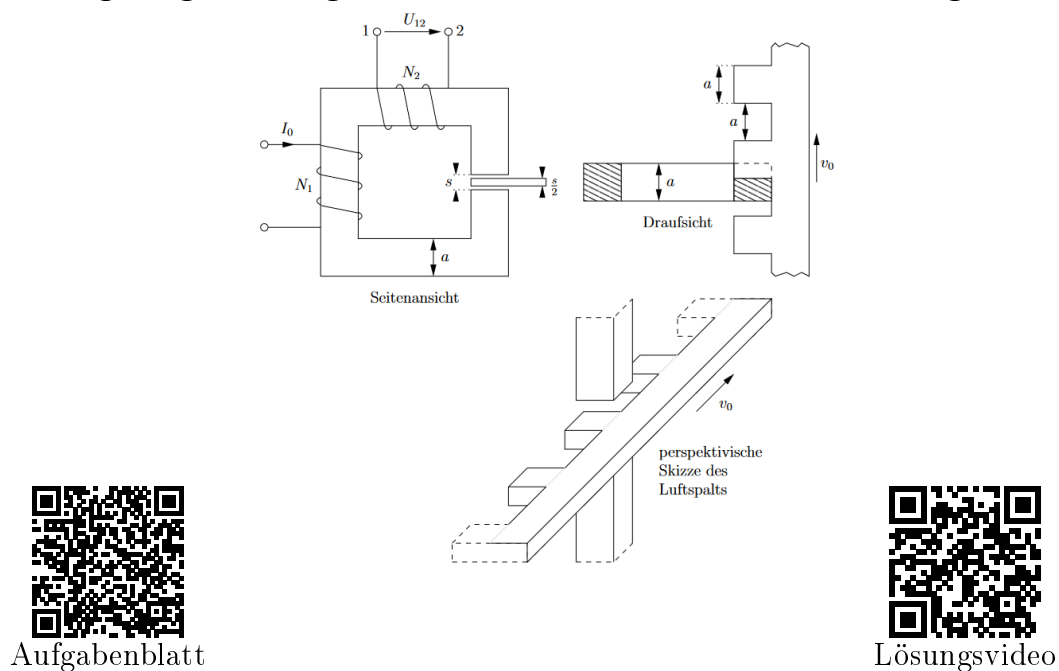
Dieses Kapitel fehlt noch, aber es existieren bereits Youtube-Videos.

Übungsaufgabe: Ummagnetisieren eines Ringkerns



http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a65_5.pdf
<https://youtu.be/J3X4dU3bdWI>

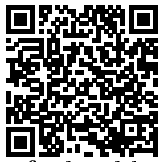
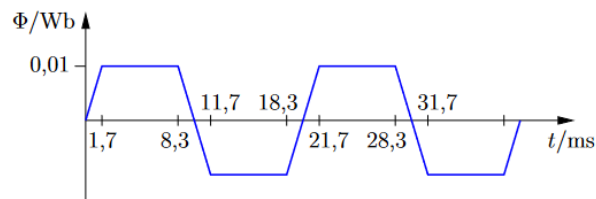
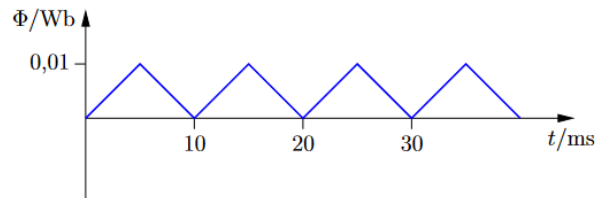
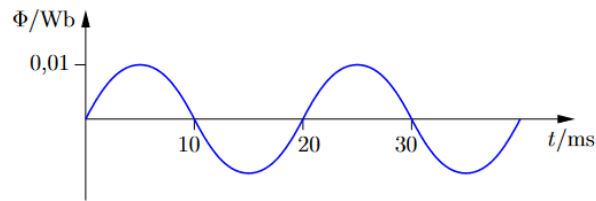
Übungsaufgabe: Magnetischer Kreis mit Geometrieänderung



http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a65_3.pdf
<https://youtu.be/jNjiF-vBSqc>



Übungsaufgabe: Einstieg in das Induktionsgesetz



Aufgabenblatt

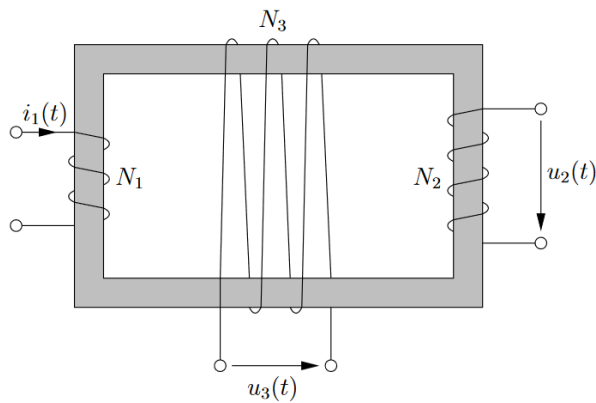


Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a71_1.pdf

<https://youtu.be/wiogU8fDG2c>

Übungsaufgabe: Induktionsgesetz im magnetischen Kreis



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_aInduktionsgesetz_1.pdf

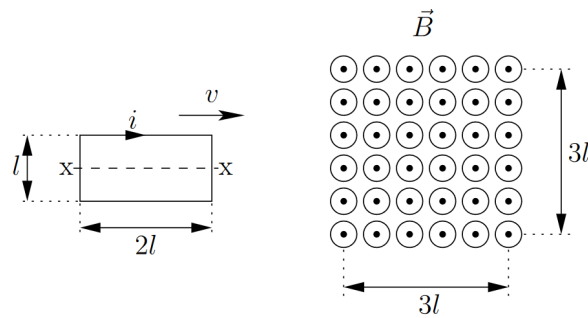
<https://youtu.be/-SZPZAgrkA>



Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.

Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.

Übungsaufgabe: Induktionsgesetz – Leiterschleife fliegt durch Magnetfeld



Aufgabenblatt



Lösungsvideo

http://stefan-schenke.de/get/challenges/Uebungsaufgabe_a65_1.pdf

<https://youtu.be/3Lhtjbd44k>



A. Anhang

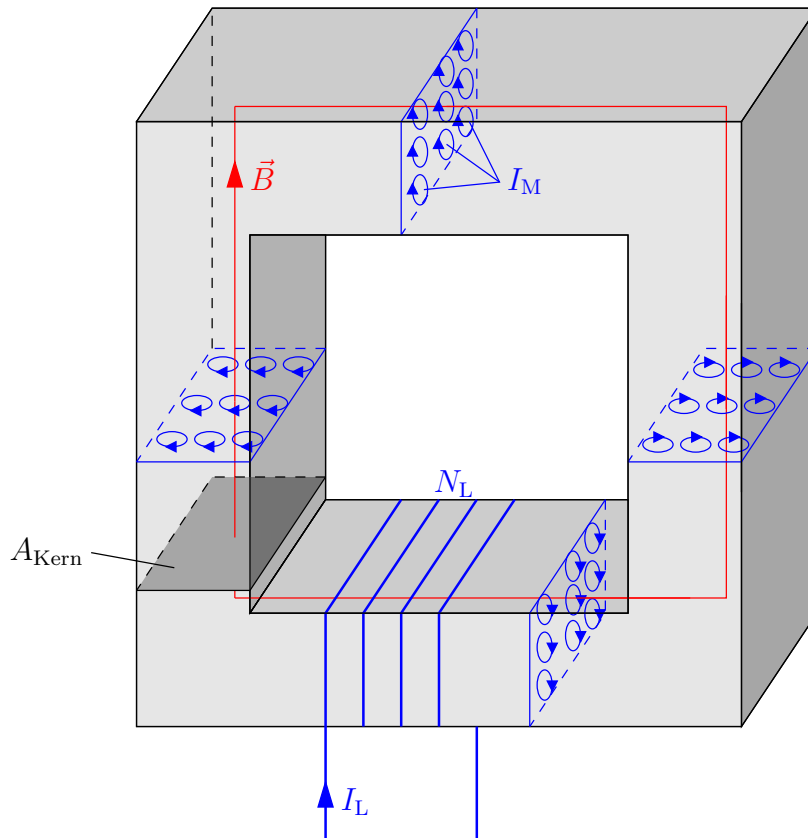
A.1. Magnetische Feldstärke H

Hintergrundwissen: Die magnetischen Phänomene lassen sich auch allein mit dem $\vec{B}$ -Feld beschreiben. Jedoch müsste man dann neben den leitungsgebundenen Strömen auch die Kreisströme innerhalb der Materie berücksichtigen. Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ ist eine künstliche Größe und wie folgt definiert:

$$\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

Im Folgenden wird gezeigt, wie man zu dieser Definition gelangt.

Wir betrachten einen geschlossenen Ringkern. Ein Leiter ist mit N_L Windungen um einen Schenkel gewickelt und führt den Strom I_L . Zusätzlich ist das Kernmaterial magnetisiert. Die Kreisströme I_M bilden magnetische Dipole, deren Dichte im Material N/V (Anzahl pro Volumen) beträgt.



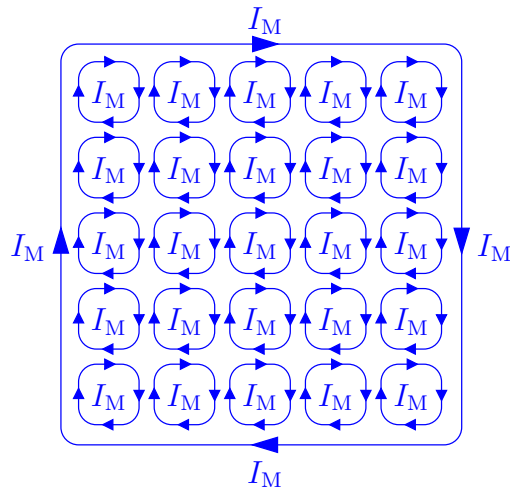
Wenden wir nun das Durchflutungsgesetz an

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

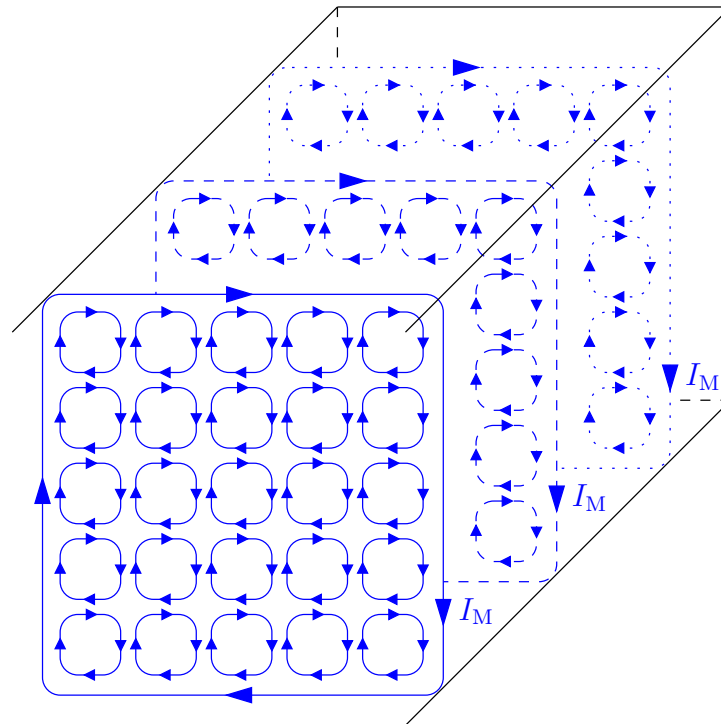
so müssen wir sowohl die Leiterströme $N_L I_L$ als auch die Kreisströme I_M im Material berücksichtigen.

Anhand der folgenden Abbildung ist erkennbar, dass sich die Kreisströme innerhalb des Materials aufheben (an den Berührungsstellen zeigen sie in entgegengesetzte Richtungen). In einer Schnittebene wirkt die Summe aller Kreisströme wie ein Strom I_M , welcher auf der Kernoberfläche im Kreis fließt.





Wir können uns nun vorstellen, dass um den Kern eine bestimmte Anzahl dieser Ströme fließt.



Um das Durchflutungsgesetz anwenden zu können, benötigen wir die Anzahl $N_{\text{Oberfl.}}$ dieser makroskopischen Kreisströme. Wir erhalten dann

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{s} = N_{\text{Oberfl.}} \cdot I_M + N_L \cdot I_L.$$



Ausgehend von der Anzahl der magnetischen Dipole pro Volumen N/V , der Querschnittsfläche des Eisenkerns A_{Kern} und dessen mittlere Länge l können wir die Gesamtzahl N_{ges} der Dipole berechnen:

$$N_{\text{ges}} = \frac{N}{V} \cdot A_{\text{Kern}} \cdot l.$$

Die Anzahl der Oberflächenströme $N_{\text{Oberfl.}}$ erhalten wir, wenn wir die Gesamtzahl N_{ges} durch die Anzahl der Dipole pro Querschnittsfläche teilen.

$$N_{\text{Oberfl.}} = N_{\text{ges}} \bigg/ \frac{A_{\text{Kern}}}{A}$$

Hierbei ist A die Fläche eines Dipols. (Wir nehmen an, dass die Summe der Dipolflächen in einer Ebene der Querschnittsfläche des Eisenkerns entspricht.) Nun können wir das Durchflutungsgesetz wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{s} &= N_{\text{Oberfl.}} \cdot I_{\text{M}} + N_{\text{L}} \cdot I_{\text{L}} \\ &= \frac{N}{V} \cdot A_{\text{Kern}} \cdot l \cdot \frac{A}{A_{\text{Kern}}} \cdot I_{\text{M}} + N_{\text{L}} \cdot I_{\text{L}} \\ &= \frac{N}{V} \cdot A \cdot I_{\text{M}} \cdot l + N_{\text{L}} \cdot I_{\text{L}} \\ &= \oint \underbrace{\frac{N}{V} \cdot A \cdot I_{\text{M}}}_{M} ds + N_{\text{L}} \cdot I_{\text{L}} \\ \Rightarrow \oint \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)}_{:=\vec{H}} \cdot d\vec{s} &= N_{\text{L}} \cdot I_{\text{L}} \end{aligned}$$

Der Vorteil dieser Definition besteht darin, dass wir nur noch externe Leitungsströme bei der Berechnung des H -Feldes berücksichtigen müssen.



A.2. Statistik

Dieses Skript umfasst

- 11 Erklärvideos,
- 15 Übungsaufgaben mit Lösungsvideos und
- 3 Sammlungen mit Trainingsaufgaben.



*Dieses Skript wurde von Dr.-Ing. Stefan Schenke erstellt.
Für Fragen und Feedback bin ich unter stefan.schenke@hsu-hh.de erreichbar.*